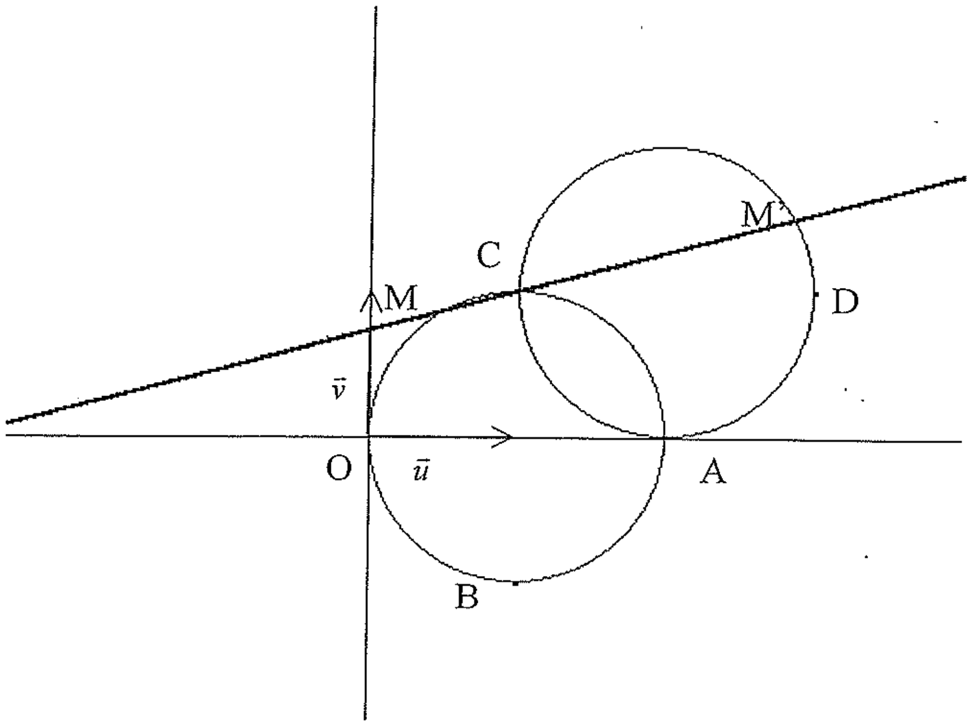
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1, commun à tous les candidats. *Sur 4 points.*



1 point, y compris la figure avec les points A, B, C *et le cercle C.*

1. *a.*
   b. $-1-i=-i(1-i)$

1 point

2. *a.* Une mesure de cet angle est $-\dfrac{\pi}{2}$. Si on note d l'affixe de D, on peut écrire :
   $d-2=-i(-1+i)$
   Donc $d=3+i$.
   C' est le cercle de diamètre $[\mathrm{CD}]$.

2 points, y compris la figure explicitement demandée

3. *a.* Cette écriture fait apparaître l'affixe du milieu Ω de $[\mathrm{OA}]$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$.
   b. $z'-2=-i(z-2)$ s'écrit : $z'=2-i\left(1+e^{i\theta}-2\right)$
   et finalement : $z'=2+i+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$, qui fait bien apparaître C'.
   c. $\dfrac{z'-c}{z-c}=\dfrac{1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{-i+e^{i\theta}}$, qui se simplifie en : $\dfrac{z'-c}{z-c}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

<u>Exercice 2, pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. *Sur 5 points.*</u>

0,5 point

1. Le triangle ABC est équilatéral.

1,5 points

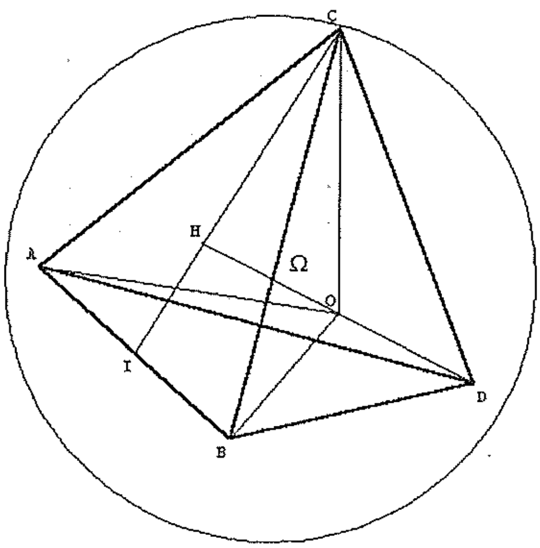
2. La droite (AB) est perpendiculaire à (CI) par définition et à (OI) puisque le triangle AOB est rectangle isocèle. Elle est donc perpendiculaire au plan (OCI), donc orthogonale à (OH). Pour la suite, (OH) est perpendiculaire à (CI) et orthogonale à (AB), donc perpendiculaire au plan (ABC).
   On peut poursuivre le raisonnement « en tournant » autour de (OH) ou montrer que, dans le triangle rectangle OCI, les segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse sont dans un rapport 2, qui caractérise H comme centre de gravité, donc orthocentre, du triangle équilatéral ABC.

1,5 points

3. *a.* $\mathrm{V} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2}$, qu'on écrit : $\mathrm{V} = \frac{a^3}{6}$.
   Le côté du triangle équilatéral ABC est $a\sqrt{2}$. Son aire est $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$, qu'on écrit : $\mathrm{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
   b. $\mathrm{OH} = \frac{3\mathrm{V}}{\mathrm{S}}$, et donc $\mathrm{OH} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

1,5 points

4. *a.* On a donné plus haut une définition barycentrique de H.
   b. Cette longueur commune est $a\sqrt{2}$.
   c. Ω appartient au plan médiateur de chacun des segments [AB], [BC], [CA], donc à leur intersection (OH). On peut écrire $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{D}$ comme une équation :
   $$\left(x+\frac{a}{3}\right)^2 + \left(x+\frac{a}{3}\right)^2 + \left(x+\frac{a}{3}\right)^2 = (x-a)^2 + x^2 + x^2,$$
   dont la solution est $\frac{a}{6}$. Le point Ω est le milieu de [OH] (ce qui peut aussi être trouvé avec un raisonnement barycentrique).



Exercice 2, pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. ***Sur 5 points.***

1,5 points

1. *a.* Des vecteurs normaux à ces plans ne sont pas colinéaires.
   b. On peut paramétrer par x ou z de façon presque immédiate.
   c. En considérant le point M de Δ d'abscisse 1 et son projeté N sur l'axe Ox, on trouve la distance MN égale à $\sqrt{7}$. Ce nombre est aussi la tangente du demi-angle au sommet du cône. D'où l'équation de celui-ci.

1 point

2. L'hyperbole est l'intersection de Γ avec un plan parallèle à l'axe du cône (une équation cartésienne d'un tel plan a un coefficient de x nul), le cercle est l'intersection du cône avec un plan perpendiculaire à Ox (donc d'équation $x = a$).

1,5 points

3. *a.* Le tableau ci-dessous donne les restes modulo 7 des entiers compris entre 0 et 6 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
Reste modulo 7	0	1	4	2	2	4	1

   b. Le tableau précédent donne la réponse à la question *a.* En additionnant deux quelconques des restes recensés à la troisième ligne, on trouve 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, et on ne trouve 0 qu'avec la somme 0 + 0.

1 point

4. *a.* Les coordonnée de A vérifient : $b^2 + c^2 = 7a^2$.
7 divise donc le premier membre, donc chacun des entiers b et c. Donc 49 divise le deuxième membre, donc 7 divise a^2. Comme 7 est premier, 7 divise a.
   b. Une méthode de « descente » conduit au résultat.

Problème, commun à tous les candidats. ***Sur 11 points.***

2 points

Partie A

1. L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = N_0$ est définie par : $f(t) = N_0 e^{at}$.
2. La condition $f(T) = 2f(0)$ s'écrit : $a = \frac{1}{T}\ln 2$, d'où le résultat.

Partie B

3 points pour la question 1

1. *a.* g étant strictement positive et dérivable, g' l'est aussi. On écrit : $\left(\frac{1}{g}\right)'(t) + a\left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{-g'(t) + ag(t)}{(g(t))^2}$ qui, en tenant compte de l'hypothèse exprimée par (E), donne l'implication demandée.
   b. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles on peut trouver un réel k tel que, pour tout réel t, $f(t) = \frac{1}{\mathrm{M}} + ke^{-at}$.

Cette « réciproque ne va nullement de soi.

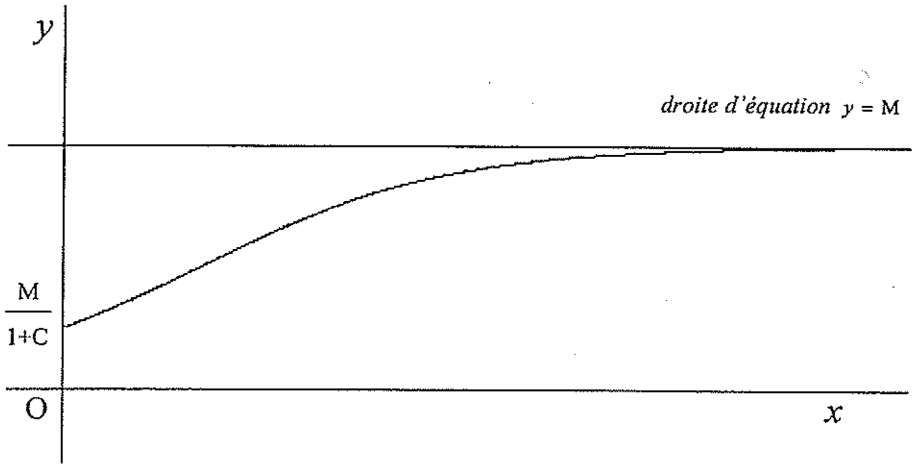
   c. Si h est une solution strictement positive de (E'), h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend pas la valeur 0. Les calculs précédents peuvent alors être faits « à l'envers ».

4 points

2. *a.* Le dénominateur de l'expression définissant g peut être lu comme l'image du réel t par une fonction positive décroissante ayant pour limite 1 en $+\infty$. Cette observation fournit les résultats.

b. La fonction g' a le signe de g, qui est donc croissante.

Cette courbe n'est pas demandée. Elle tient lieu de résumé de l'étude des variations.



La fonction g est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Son minimum est $\frac{M}{1+C}$ et elle prend des valeurs supérieures à $\frac{M}{2}$. Donc elle prend la valeur $\frac{M}{2}$, en une seule occasion.

c. De $g' = ag - \frac{a}{M}g^2$, on déduit l'égalité demandée. Le signe de g'' est celui de $1 - \frac{2g}{M}$. L'existence et l'unicité de t_0 étaient prouvées par des considérations d'analyse. On trouve la valeur de t_0 en résolvant l'équation $\frac{M}{2} = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$. Elle s'écrit aussi : $Ce^{-at} = 1$, et a pour solution $t_0 = \frac{1}{a}\ln C$.

Cette question peut être minimisée, car elle n'apporte rien.

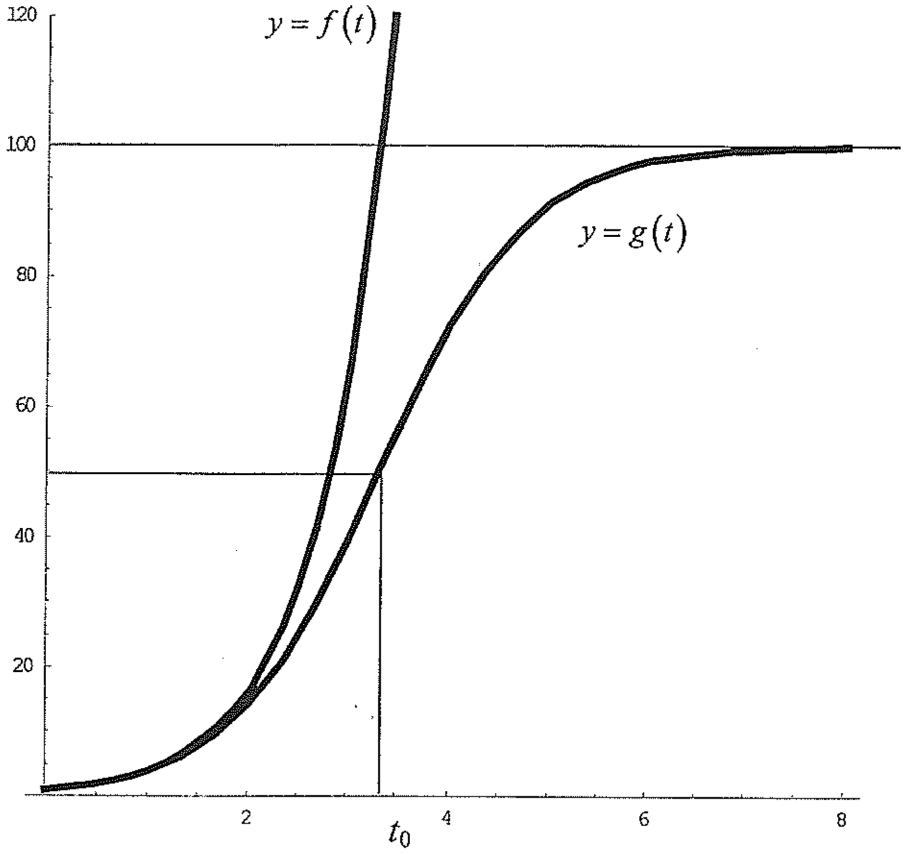
d. Cette valeur moyenne est donnée par :

$m = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{M}{1+Ce^{-at}}\mathrm{d}t$, et elle s'écrit finalement : $m = aM\frac{\ln(2C) - \ln(C+1)}{\ln C}$.

Partie C

2 points (car l'ensemble est peut-être un peu touffu)

1. On trouve $N_0 = 1$, $T = 0{,}5$ et $a = 2\ln 2$.
2. Là encore, il ne s'agit que d'une identification.
3. *On n'a pas reproduit ci-dessous la figure à rendre, sur laquelle on perçoit clairement la réponse à la question suivante et la bonne adéquation du second modèle.*
   Les deux premières heures sont la période de validité apparente de ce premier modèle.


$y = f(t)$
$y = g(t)$
120
100
80
60
40
20
2
4
6
8
t_0