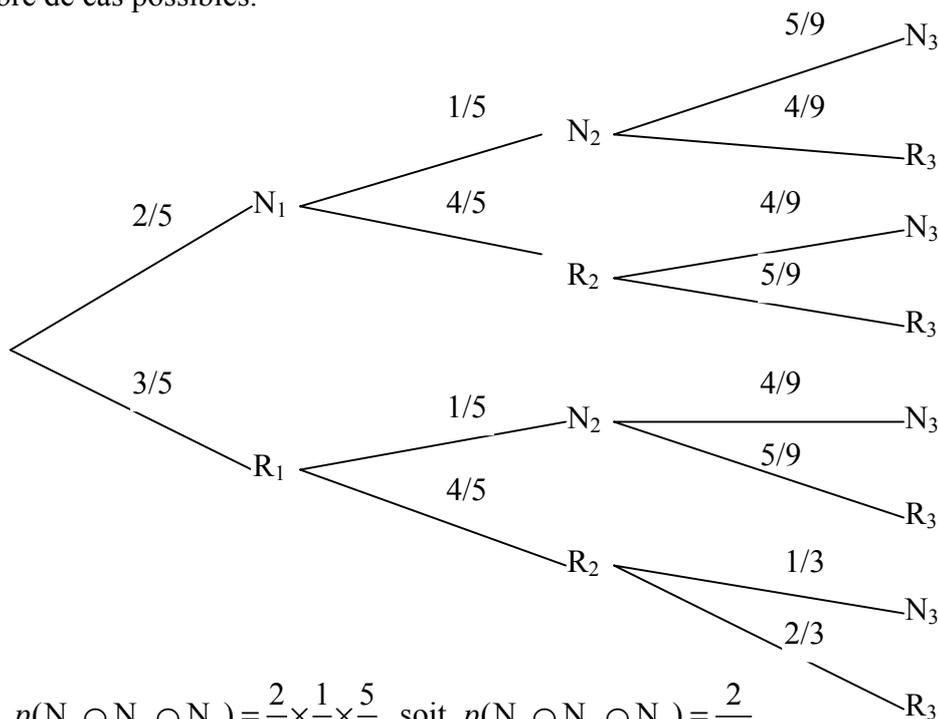


Exercice 1

- 1) Les propositions b) et c) sont vraies
- 2) Les propositions b) et d) sont vraies
- 3) Les propositions b) et d) sont vraies
- 4) Les propositions b) et d) sont vraies

Exercice 2 - Obligatoire

Dans chaque urne, les tirages sont effectués au hasard ; on peut considérer qu'ils sont équiprobables. La probabilité d'un évènement est le rapport du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.



$$2) a) p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} \text{ soit } p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{45}$$

$$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \text{ soit } p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{32}{225}$$

b) $N_1 \cap N_3$ est la réunion disjointe de $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$

$$\text{D'où } p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap R_2 \cap N_3), \text{ soit } p(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}.$$

c) Comme dans la question précédente :

$R_1 \cap N_3$ est la réunion disjointe de $R_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $R_1 \cap R_2 \cap N_3$

$$\text{D'où } p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3), \text{ soit } p(R_1 \cap N_3) = \frac{16}{75}.$$

3) N_3 est la réunion disjointe de $N_1 \cap N_3$ et $R_1 \cap N_3$

$$\text{D'où } p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3), \text{ soit } p(N_3) = \frac{2}{5}.$$

$$4) p(N_1) \times p(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \text{ et } p(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}$$

donc $p(N_1 \cap N_3) \neq p(N_1) \times p(N_3)$. N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

$$5) p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)}. \text{ On obtient : } p_{N_3}(R_1) = \frac{8}{15}.$$

Exercice 3

1) a) Pour tout x de \mathbf{R} , $f(-x)f'(x) = 1$. En changeant x en $-x$ on obtient, pour tout x de \mathbf{R} , $f(x)f'(-x) = 1$. En particulier, le produit $f(x)f'(-x)$ n'est jamais nul donc f ne s'annule pas sur \mathbf{R} .

b) f étant dérivable sur \mathbf{R} , $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur \mathbf{R} par composition. Par suite g est dérivable sur \mathbf{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbf{R} .

On a : $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$

Or $f(-x)f'(x) = 1$ et $f(x)f'(-x) = 1$ en changeant x en $-x$

D'où $g'(x) = 0$, pour tout x de \mathbf{R} .

c) g' est nulle sur l'intervalle \mathbf{R} donc g est une fonction constante sur \mathbf{R} .

Or $g(0) = f(0) \times f(0) = 16$ donc g est la fonction constante égale à 16.

d) Soit x un réel. D'après les questions précédentes, on a : $f(-x)f(x) = 16$ et f ne s'annule pas sur \mathbf{R} d'où $\frac{1}{f(-x)} = \frac{f(x)}{16}$. Or $\frac{1}{f(-x)} = f'(x)$ d'après la condition (C) donc $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$.

Conclusion : pour tout x de \mathbf{R} , $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$. f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{16}$.

De plus : $f(0) = -4$ d'après les hypothèses de (C).

2) Soit f une solution de l'équation différentielle (E). Considérons la fonction h définie sur \mathbf{R} par

$h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{16}}$. h est dérivable sur \mathbf{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbf{R} .

$h'(x) = f'(x)e^{-\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}f(x)e^{-\frac{x}{16}} = e^{-\frac{x}{16}} \left[f'(x) - \frac{1}{16}f(x) \right] = 0$ car f vérifie l'équation différentielle (E)

h' est donc nulle sur l'intervalle \mathbf{R} . Par suite, h est une fonction constante sur \mathbf{R} : pour tout x de \mathbf{R} ,

$h(x) = K$, K étant une constante réelle. Soit $f(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$, avec K réel.

Réciproquement : soit K un réel. La fonction $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ est solution de (E). En effet,

$$f'(x) = K \times \frac{1}{16} e^{\frac{x}{16}} = \frac{1}{16} f(x).$$

b) Notons $f_K : x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$.

$$f_K(0) = -4 \Leftrightarrow Ke^0 = -4 \Leftrightarrow K = -4.$$

La fonction $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique solution de (E) prenant la valeur -4 en 0.

3) D'après les questions précédentes : si f est une fonction dérivable sur \mathbf{R} satisfaisant la condition (C) alors f est la fonction $x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$.

Réciproquement : montrons que $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est dérivable et satisfait la condition (C).

- f est une fonction exponentielle donc dérivable sur \mathbf{R} ; sa dérivée est $f' : x \mapsto -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}$.
- $f(0) = -4$
- pour tout x de \mathbf{R} , on a : $f(-x)f'(x) = -4e^{-\frac{x}{16}} \times -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}} = 1 \times e^0 = 1$.

Conclusion : $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction dérivable sur \mathbf{R} satisfaisant la condition (C).

Exercice 4

Partie A : supposons que les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont sécantes en un point E.

$$\text{On a : } \overline{BH} \cdot \overline{DC} = (\overline{BE} + \overline{EH}) \cdot \overline{DC} = \overline{BE} \cdot \overline{DC} + \overline{EH} \cdot \overline{DC}$$

Or la droite (BE) est la hauteur issue de B du tétraèdre ABCD donc (BE) est perpendiculaire au plan (ADC). Par suite, (BE) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan (ADC).

En particulier (BE) est orthogonale à (DC) d'où $\overline{BE} \cdot \overline{DC} = 0$.

De même, la droite (EH) est la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD donc (EH) est perpendiculaire au plan (BCD). Par suite, (EH) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan (BCD). En particulier (EH) est orthogonale à (DC) d'où $\overline{EH} \cdot \overline{DC} = 0$.

Finalement :

$$\overline{BH} \cdot \overline{DC} = \overline{BE} \cdot \overline{DC} + \overline{EH} \cdot \overline{DC} = 0 \text{ soit } \overline{BH} \cdot \overline{DC} = 0 \text{ donc (BH) est une hauteur du triangle BCD.}$$

Partie B : $\overline{BC}(10 ; -4 ; 2)$ et $\overline{BD}(-5 ; -6 ; -2)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des vecteurs \overline{BC} et \overline{BD} ne sont pas proportionnelles donc les points B, C et D ne sont pas alignés ; ils définissent bien un plan.

$$-2 \times (-6) - 3 \times 1 + 4 \times 1 - 13 = 12 - 3 + 4 - 13 = 0$$

$$-2 \times 4 - 3 \times (-3) + 4 \times 3 - 13 = -8 + 9 + 12 - 13 = 0$$

$$-2 \times (-1) - 3 \times (-5) + 4 \times (-1) - 13 = 2 + 15 - 4 - 13 = 0$$

Les coordonnées des points B, C et D vérifient l'équation : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$ donc cette équation est bien une équation cartésienne du plan (BCD).

b) (AH) est la droite passant par A(3 ; 2 ; -1) dirigée par le vecteur $\vec{n}(-2 ; -3 ; 4)$ normal à (BCD).

$$\text{Une représentation paramétrique de la droite (AH) est : } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Le point H appartenant à la fois à la droite (AH) et au plan (BCD) correspond au paramètre t vérifiant : $-2 \times (3 - 2t) - 3 \times (2 - 3t) + 4 \times (-1 + 4t) - 13 = 0$, soit $t = 1$.

Les coordonnées de H sont (1 ; -1 ; 3).

c) On a $\overline{BH}(7 ; -2 ; 2)$ et $\overline{CD}(-5 ; -2 ; -4)$ donc $\overline{BH} \cdot \overline{CD} = 7 \times (-5) + (-2) \times (-2) + 2 \times (-4)$, soit $\overline{BH} \cdot \overline{CD} = -39$.

Par suite, (BH) n'est pas une hauteur du triangle BCD donc les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B ne sont pas sécantes d'après la partie A.

2) Les hauteurs issues des points I, J et K du tétraèdre OIJK sont respectivement les droites (OI), (OJ) et (OK). De plus la hauteur issue de O du tétraèdre passe évidemment par O !

Le tétraèdre OIJK est donc orthocentrique.

Exercice 5

La fonction $u : x \mapsto x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc $f = \ln u$ est

dérivable sur $[0; +\infty[$. Pour tout x de $[0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.

g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -1$ dérivables sur $[0; +\infty[$. Pour tout x de $[0; +\infty[$, on a : $g'(x) = e^x$.

On a $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 1$ donc C_f et C_g admettent au point d'abscisse 0 des tangentes passant par le même point $O(0 ; 0)$ et ayant le même coefficient directeur 1.
La droite d'équation $y = x$ est une tangente commune aux courbes C_f et C_g au point $O(0 ; 0)$.

Position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - x$.

Notons h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$.

h est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme des fonctions f et $x \mapsto -x$, dérivables sur $[0; +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}.$$

$h'(0) = 0$ et pour tout x de $]0; +\infty[$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

De plus $h(0) = 0$ donc h est négative sur $[0; +\infty[$.

Conclusion : la courbe C_f est en dessous de la droite Δ d'équation $y = x$ sur $[0; +\infty[$.

2) $M(x ; y)$ et $M'(y ; x)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

En posant $y = \ln(x+1)$, on a les équivalences : $x \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Par suite :

$M(x ; y) \in C_f \Leftrightarrow y = \ln(x+1)$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow e^y = x+1$ et $y \geq 0 \Leftrightarrow M'(y ; x) \in C_g$

Ce qui prouve que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite Δ .

Une autre méthode consiste à montrer que f et g sont des bijections réciproques en vérifiant que :

- pour tout $x \geq 0$, $(f \circ g)(x) = x$

- pour tout $y \geq 0$, $(g \circ f)(y) = y$

3) Sur $[0; +\infty[$, f est une fonction continue car dérivable et positive donc $\int_0^a f(x)dx$ est l'aire, en unités d'aire du domaine plan limité par C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

Par symétrie d'axe Δ (conservation des aires), $\int_0^a f(x)dx$ est aussi l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par C_g , la droite d'équation $y = a$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(a+1)$.

Or cette dernière aire, en unités d'aire, s'obtient par différence :

$$(\text{aire du rectangle OABC}) - (\text{aire sous la courbe } C_g \text{ entre } 0 \text{ et } \ln(a+1)) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)dx.$$

A, B et C étant respectivement les points de coordonnées $(\ln(a+1) ; 0)$, $(\ln(a+1) ; a)$ et $(0 ; a)$.

$$\text{b) } \int_0^a f(x)dx = a \ln(a+1) - [e^x - x]_0^{\ln(a+1)} = a \ln(a+1) - (a+1 - \ln(a+1) - 1)$$

$$\text{soit, } \int_0^a f(x)dx = (a+1) \ln(a+1) - a.$$

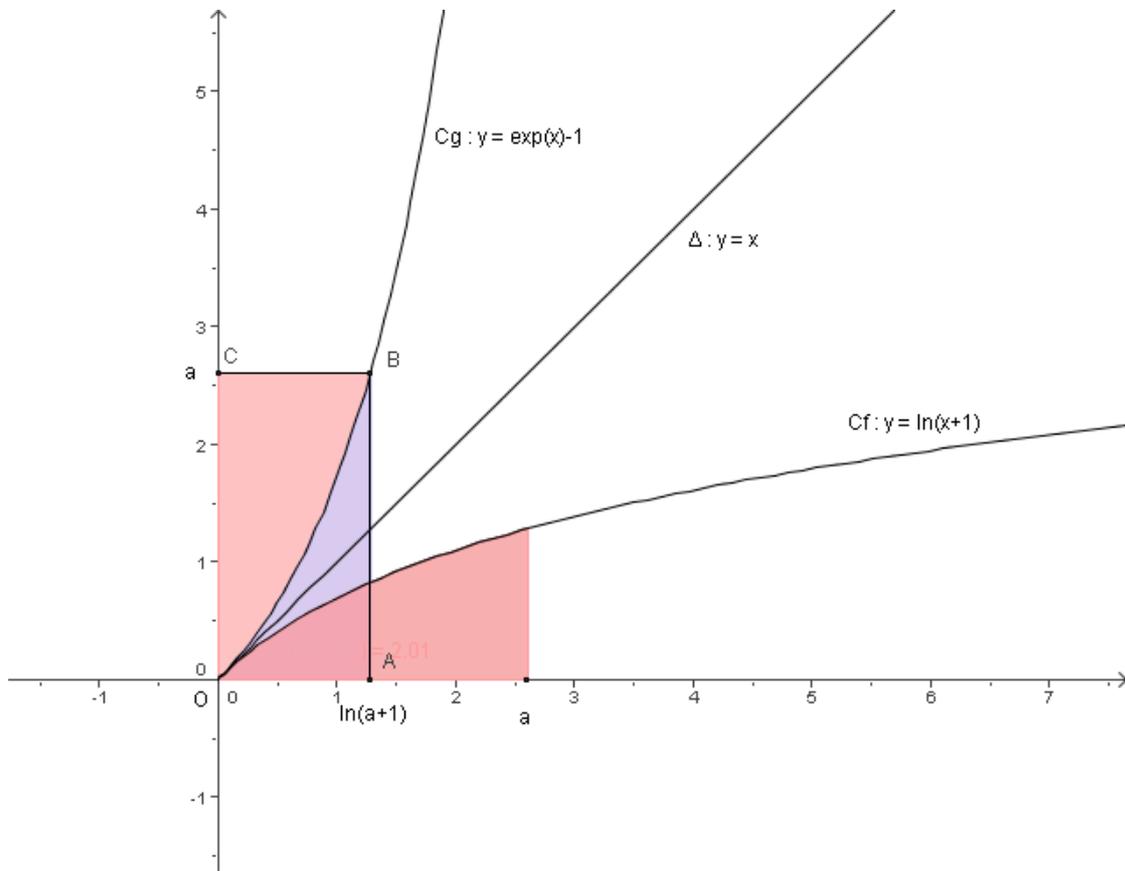
c) Notons $u : x \mapsto \ln(x+1)$ et $v : x \mapsto x+1$.

u et v sont dérivables sur $[0; +\infty[$ et leurs dérivées $u' : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $v' : x \mapsto 1$ sont continues sur

$[0; +\infty[$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :

$$I(a) = \int_0^a 1 \times \ln(x+1)dx = \int_0^a v'(x)u(x)dx = [v(x)u(x)]_0^a - \int_0^a v(x)u'(x)dx$$

$$I(a) = [(x+1) \ln(x+1)]_0^a - \int_0^a 1dx = (a+1) \ln(a+1) - [x]_0^a, \text{ soit } I(a) = (a+1) \ln(a+1) - a.$$



Exercice 2 – spécialité

1) Notons P_n la propriété : " $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ".

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n > 0$.

Initialisation : P_1 est vraie car $S_1 = \sum_{p=1}^1 p^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.

Hérédité : supposons que P_n est vraie pour un entier $n > 0$ et montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie.

Hypothèse de récurrence : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $n > 0$.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

d'où $S_{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$, soit P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier $n > 0$.

$$2) \text{ a) } \text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = \text{PGCD}\left(\left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2, \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2\right)$$

$$= \text{PGCD}((k(2k+1))^2, ((2k+1)(k+1))^2) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2, (k+1)^2)$$

Rappelons la propriété : si a , b et k sont trois entiers naturels alors $\text{PGCD}(ka, kb) = k \times \text{PGCD}(a, b)$.

$$\text{b) } \text{PGCD}(k, k+1) = 1.$$

En effet, $(k+1) - k = 1$ donc k et $k+1$ sont premiers entre eux d'après le théorème de Bezout.

c) D'après la question a), pour tout entier naturel k non nul :

$$\text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2, (k+1)^2)$$

Comme $\text{PGCD}(k, k+1) = 1$, on a $\text{PGCD}(k^2, (k+1)^2) = 1$ d'après la propriété citée dans l'introduction.

D'où $\text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2$.

3) Soit k un entier naturel.

a) $(2k+3) - (2k+1) = 2$. Le PGCD de $(2k+1)$ et $(2k+3)$ divise toute combinaison linéaire de $(2k+1)$ et $(2k+3)$ donc divise 2. $\text{PGCD}((2k+3), (2k+1))$ est égale à 1 ou 2. Or $(2k+1)$ et $(2k+3)$ sont des entiers impairs donc $\text{PGCD}((2k+3), (2k+1)) = 1$.

$$\text{b) } \text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = \text{PGCD}\left(\left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2, \left(\frac{(2k+2)(2k+3)}{2}\right)^2\right)$$

$$= \text{PGCD}(((2k+1)(k+1))^2, ((k+1)(2k+3))^2) = (k+1)^2 \text{PGCD}(2k+1)^2, (2k+3)^2)$$

Comme $\text{PGCD}(2k+1, 2k+3) = 1$, on a $\text{PGCD}((2k+1)^2, (2k+3)^2) = 1$ d'après la propriété citée dans l'introduction.

D'où $\text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = (k+1)^2$.

4) Soit n un entier naturel non nul.

- si $n = 2k$ avec k entier naturel non nul, d'après l'étude 2) :

$$\text{PGCD}(S_n, S_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = 1 \Leftrightarrow (2k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

k étant non nul, la dernière proposition est fausse. Par suite, il n'existe de pas d'entier naturel pair non nul n tel que S_n et S_{n+1} soit premiers entre eux.

- si $n = 2k+1$ avec k entier naturel, d'après l'étude 3) :

$$\text{PGCD}(S_n, S_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = 1 \Leftrightarrow (k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow n = 1$$

1 est la seule valeur de n qui est telle que S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.