Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

1. Si $z \neq -1$, $z = \dfrac{z-1}{z+1} \iff z^2 + z = z - 1 \iff z^2 = -1 \iff z = \text{i}$ ou $z = -\text{i}$.
Les points invariants par f sont les deux points d'affixes i et $-$i

2. a. $z \neq -1$, $(z'-1)(z+1) = \left(\dfrac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = z - 1 - z - 1 = -2$.

b. L'égalité de ces deux complexes entraîne l'égalité de leurs modules soit $\left|(z'-1)(z+1)\right| = |-2| \iff |z'-1| \times |z+1| = 2 \iff \text{A}M' \times \text{B}M = 2$.
Même chose pour les arguments : $\arg[(z'-1)(z+1)] = \arg(-2) \iff$
$\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi \quad [2\pi] \iff \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{A}M'}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{B}M}\right) = \pi \quad [2\pi]$.

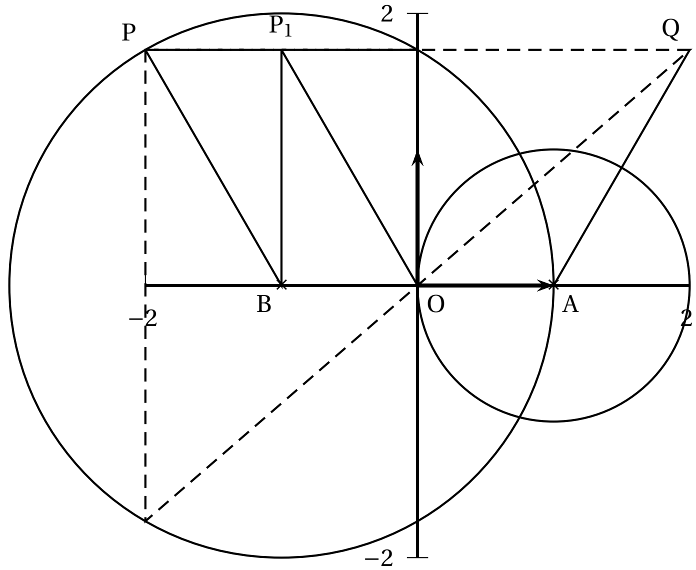
3. M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 si et seulement si
$\text{BM} = 2 \iff |z - (-1)| = 2 \iff |z+1| = 2$. En reportant dans la première relation trouvée à la question précédente, il suit que $2\text{A}M' = 2 \iff \text{A}M' = 1$ qui signifie que M' appartient au cercle (C$'$) de centre A et de rayon 1.

4. a. $p + 1 = -2 + 1 + \text{i}\sqrt{3}$. D'où $|p+1|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \implies |p+1| = 2$. Donc
$p + 1 = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$

b. On vient de trouver que $|p+1| = 2 \iff \text{BP} = 2$ qui signifie que P appartient au cercle (C).

c. Soit P_1 le point d'affixe $p+1$. Les points P_1 et O sont les images respectives des points P et B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. (OBPP_1) est donc un parallélogramme. Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{OP}_1}$ et $\overrightarrow{\text{BP}}$ ont la même affixe, d'où le même argument $\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ d'après la a. et le même module 2.
D'autre part la construction classique (opposé du conjugué) montre que P et Q sont symétriques autour de l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{v}\right)$ et B et A le sont aussi. Donc [BP] et[AQ] sont symétriques dans la symétrie autour de $\left(\text{O},\ \overrightarrow{v}\right)$. Donc par supplémentarité $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AQ}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Or d'après 2. b. $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{BP}}\right) + \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AP}'}\right) = \pi$. Conclusion : le point P$'$ appartient à la droite (AQ), ou encore les points A, P$'$ et Q sont alignés.

d. On en déduit la construction simple de P$'$:
— Construire Q symétrique de P autour de l'axe des ordonnées ;
— Le segment [AQ] coupe le cercle (C) en P$'$.



Exercice 2 **5 points**

Proposition 1 : Faux.

Avec $M(x\,;\,y\,;z)$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff 2x-4y+0(x-2)=0 \iff 2x-4y=0 \iff x-2y=0$ qui est l'équation d'un plan. Or les coordonnées $(1\,;2\,;0)$ du point I ne vérifient pas cette équation.

Proposition 2 : Vrai.

$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| \iff \left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \iff \mathrm{I}M=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC} \iff M$ appartient à la sphère de centre I et de diamètre [BC].

Proposition 3 : Faux.

En prenant comme base de ce tétraèdre le triangle rectangle OBC, [OA] est une hauteur. Le volume est donc $\mathrm{V}=\dfrac{1}{3}\mathscr{A}(\mathrm{OBC})\times \mathrm{OA}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\times 2=\dfrac{8}{3}$.

Proposition 4 : Vrai

Les coordonnées des trois points vérifient bien l'équation donnée.

Le vecteur $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{4}{9}\\\frac{8}{9}\end{pmatrix}=\dfrac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; il est donc bien normal au plan (ABC). Enfin les coordonnées de H vérifient bien l'équation du plan (ABC).

Proposition 5 : Vrai.

De $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ on en déduit que $\mathrm{G}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$ puis que $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$. Une équation paramétrique de la droite (AG) est donc :

$$\left\{\begin{array}{l}x=0+1\times t\\y=0+2\times t\\z=2+(-2)\times t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=t\\y=2\times t\\z=2-2t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 : Vrai

Par récurrence :

Initialisation $3|2^{2\times 0}-1 \iff 3|0$. Vrai : c'est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $3|2^{2n}-1 \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $2^{2n}-1 = 3k \iff 2^{2n} = 3k+1$.

Or $2^{2(n+1)} = 2^{2n+2} = 2^{2n} \times 2^2 = 4 \times 2^{2n} = 4(3k+1) = 12k+4$.

Finalement $2^{2(n+1)} - 1 = 12k+3 = 3(4k+1)$ qui est un multiple de 3.

Autre méthode : $2^2 \equiv 1 \mod 3$, d'où $\left(2^2\right)^n \equiv 1 \mod 3 \iff 2^{2n} \equiv 1 \mod 3 \iff 2^{2n}-1 \equiv 0 \mod 3 \iff 2^{2n}-1$ est un multiple de 3.

C'est vrai au rang 0 et si c'est vrai au rang n, c'est vrai au $n+1$, donc on a démontré par le principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n}-1$ est un multiple de 3.

Proposition 2 : Faux

$x^2+x \equiv 0 \mod 6 \iff x(x+1) \equiv 0 \mod 6$. Or les entiers x et $x+1$ sont consécutifs ; il en résulte donc que ou $x \equiv 0 \mod 3$ (si $x+1$ est pair) , ou $x+1 \equiv 0 \mod 3$ (si x est pair) et dans ce dernier cas $x \equiv 0 \mod 3$ est faux. Exemple : $2^2+2 \equiv 0 \mod 6$ et $2 \equiv 0 \mod 3$ est faux.

Proposition 3 : Faux

Un couple solution est suggéré : (4 ; 9) puisque $12 \times 4 - 5 \times 9 = 3$.

$\left\{\begin{array}{rcl} 12x-5y &=& 3\\ 12\times 4 - 5\times 9 &=& 3\end{array}\right. \implies$ (par différence) $12(x-4)-5(y-9) = 0 \iff 12(x-4) = 5(y-9)$ (1).

Donc 5 étant premier avec 12 divise $x-4$; il existe donc α tel que

$x-4 = 5\alpha \iff x = 4+5\alpha$ et en remplaçant dans l'égalité (1), $y-9 = 12\alpha \iff y = 9+12\alpha$. Si α est impair on n'obtient pas les couples solutions proposés.

Proposition 4 : Si d est le PGCD$(a\,;\,b)$ alors il existe deux entiersa' etb' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Le PPCM$(a\,;\,b) = a'b'd$.

En remplaçant dans l'énoncé $a'b'd - d = 1 \iff d\left(a'b'-1\right) = 1$. Cette égalité prouve que d divise 1, donc que $d = 1$. On a donc PGCD$(a\,;\,b) = 1$ et PPCM$(a\,;\,b) = ab$.

L'égalité s'écrit donc : $ab-1 = 1 \iff ab = 2$. Les seuls couples solutions sont (1 ; 2) et (2 ; 1) et le seul avec $a < b$ est le couple(1 ; 2).

Proposition 5 : Vrai

On a par hypothèse $M = 100a+10b+c = 27k$, (1) $k \in \mathbb{N}$et$N = 100b+10c+a$.

Donc $M-N = 99a-90b-9c = 9(11a-10b-c)$.

Or (1) $\implies -10b-c = 100a-27k$. Donc $M-N = 9(11a+100a-27k) = 9(11a-27k) = 9(3\times 37a - 3\times 9k) = 27(37a-9k)$ qui est bien un multiple de 27.

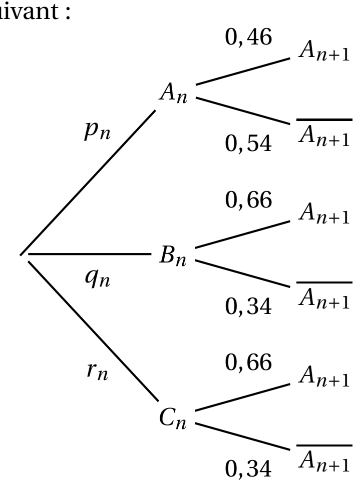
Exercice 3 **4 points**

1. **a.** $318+110 = 428$ personnes sur 1 000 ont eu au moins un retard le premier mois ; la probabilité est donc égale à 0,428.

   b. Sur les 572 personnes n'ayant pas eu de retard le premier mois, $250+60 = 310$ ont eu au moins un retard le mois suivant ; la probabilité est donc égale à $\dfrac{310}{572} = \dfrac{155}{286}$.

2. **a.** La lecture du tableau permet de dire que $p_1 = 0,512$, $q_1 = 0,318$ et $r_1 = 0,110$.

b. On dresse l'arbre suivant :



On a donc

$$p_{n+1} = p\left(A_{n+1}\right) = p_n \times p_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + q_n \times p_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + r_n \times p_{C_n}\left(A_{n+1}\right) =$$

soit $p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n$.

c. Or $p_n + q_n + r_n = 1$. D'où $p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n) = -0,2p_n + 0,66$.

d. $u_n = p_n - 0,55 \Longrightarrow u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 =$
$-0,2(u_n + 0,55) + 0,11 = -0,2u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-0,2$.

e. Comme la raison de la suite (u_n) est $-1 < -0,2 < 1$, on sait que
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et par conséquent
$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n - 0,55 = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,55$.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

1. On sait que $F'(x) = f(x) \leqslant 0 \iff f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $[2\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 4\mathrm{e}^{-2}$, d'où $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x 4\mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{d}t \iff F(3) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.
D'autre part cette intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[2 ; 3]$ est positive.

Partie B

1. a. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x)$, dérivée qui a le signe du trinôme $x(2-x)$. Celui-ci est positif entre les racines 0 et 2. Les variations sont donc bien celles qui sont indiquées dans le tableau.
D'autre part $f(0) = 0$ et $f(2) = 2^2\mathrm{e}^{-2} = 4\mathrm{e}^{-2}$.

b. On a $f(x) - g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe du trinôme $x^2 - 1$.
Conclusion : $(\mathscr{C})$ est au dessus (Γ) sauf entre -1 et 1.

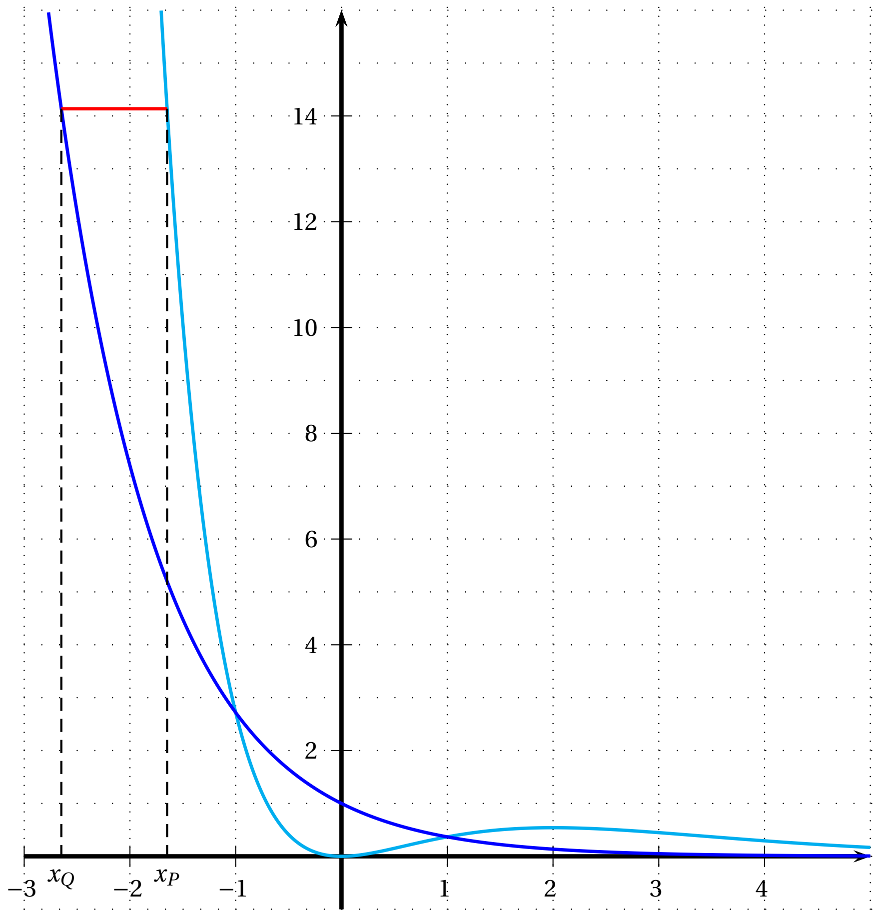
2. La fonction h est la fonction « écart vertical » entre les deux courbes de la question précédente.
$H'(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x} - \left(-x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x - 2 + x^2 + 2x + 1\right) =$
$\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 1\right)$.

a. $H'(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x} - \left(-x^2-2x-1\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-2x-2+x^2+2x+1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-1\right)$. Donc H est bien une primitive de h.

b. $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_1^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\alpha} [f(t)-g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_1^{\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t = [H(t)]_1^{\alpha} = \left(-\alpha^2-2\alpha-1\right)\mathrm{e}^{-\alpha} + 4\mathrm{e}^{-1}$.

c. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^2}{\mathrm{e}^{\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}(a) = \frac{4}{\mathrm{e}}$.



3. **a.** Voir ci-dessus

b. On a par définition $PQ = \left|x_Q - x_P\right| = x_P - x_Q$ (d'après le graphique pour $x < -1$).

D'autre part par définition : $f(x_P) = m$ et $g(x_Q) = m$. Donc $f(x_P) = g(x_Q)$.

c. Si $PQ = 1$, alors $x_P = x_Q + 1$.

L'égalité précédente $f(x_P) = g(x_Q)$ s'écrit donc :

$x_P^2\mathrm{e}^{-x_P} = \mathrm{e}^{-x_Q} \iff \left(x_Q+1\right)^2 2\mathrm{e}^{-x_Q-1} = \mathrm{e}^{-x_Q} \iff \left(x_Q+1\right)^2\mathrm{e}^{-1} = 1 \iff \left(x_Q+1\right)^2 = \mathrm{e} \iff x_Q + 1 = -\sqrt{\mathrm{e}} \iff x_P = -\sqrt{\mathrm{e}}$.