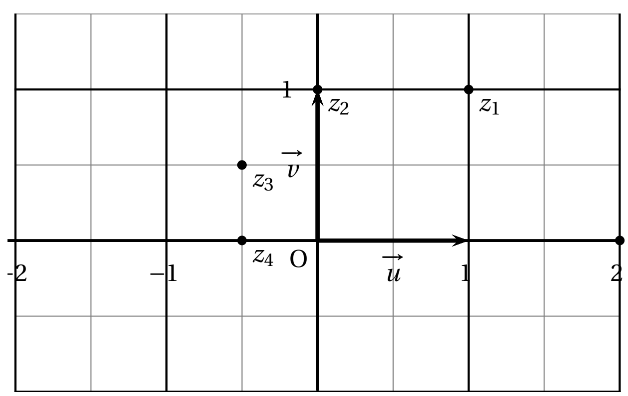
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
3 avril 2006

Exercice 1

1. **a.** Faux. Contre-exemple : $\left(e^2\right)^3 = e^6$ et $e^{\left(2^3\right)} = e^8$.
   b. Vrai.
   c. Faux. L'équation de la tangente est $y - e = e(x-1) \iff y = ex$
2. **a.** Vrai.
   b. Faux. Exemple la fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0.
   c. Vrai. Définition du nombre dérivé $f'(a)$.
3. **a.** Faux : contre-exemple : $u_n = 3n$ et $v_n = -2n$.
   b. Vrai : la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
   c. Vrai : même chose, la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
   d. Faux : si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, la suite diverge.

Exercice 2 (non spécialistes)

1. $z_0 = 2,\ z_1 = 1+i,\ z_2 = i,\ z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2},\ z_4 = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.



2. On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2} z_n\right| = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$.
   L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$. On sait que $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Finalement :
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. On a $OA_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leqslant 0,1 \iff 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0,1 \iff 20 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n \iff 20 \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \iff \dfrac{n}{2}\ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \dfrac{2\ln 20}{\ln 2} \approx 8,6$.
   La condition sera donc réalisée la première fois par u_9. On a donc $n_0 = 9$.
   La calculatrice livre $u_8 = 0,125$ et$u_9 \approx 0,084 < 0,1$.

4. **a.** Pour tout naturel n, $u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$. On peut donc écrire $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\frac{1+\text{i}}{2}z_n - z_n}{\frac{1+\text{i}}{2}z_n} = \dfrac{1+\text{i}-2}{1+\text{i}} = \dfrac{-1+\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{\text{i}(1+\text{i})}{1+\text{i}} = \text{i}$.

L'interprétation géométrique de cette égalité est :

— $\left(\overrightarrow{\text{O}A_{n+1}},\ \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : pour tout naturel n le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

— En modules l'égalité donne $\dfrac{A_nA_{n+1}}{\text{O}A_{n+1}} = 1 \iff A_nA_{n+1} = \text{O}A_{n+1}$. Conclusion le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est isocèle en A_{n+1}.

Finalement pour tout naturel n, le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}, comme on peut le voir sur les quatre premiers triangles de la figure ci-dessus.

b. Comme les triangles sont isocèles $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = \text{O}A_1 + \text{O}A_2 + \cdots + \text{O}A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}^n}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^n-1\right)}{\sqrt{2}^{n-1}(\sqrt{2}-1)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}^n-1}{\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}.$$

EXERCICE 2 (spécialité)

1. La transformation f est de la forme $z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}$: c'est donc une similitude.

Cherchons son centre Ω invariant par f :

$z_\Omega = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)z_\Omega + 1 \iff z_\Omega\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 1 \iff z_\Omega(1-\text{i}) = 2 \iff z_\Omega = \dfrac{2}{1-\text{i}} = 1+\text{i}$.

Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $1+\text{i}$.

Les deux égalités $z' = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)z+1$ et $1+\text{i} = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)(1+\text{i})+1$ entraînent par différence :

$z'-(1+\text{i}) = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)[z-(1+\text{i})]$.

Or $\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

L'écriture de la similitude est donc finalement :

$$\boldsymbol{z'-(1+\text{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}[z-(1+\text{i})].}$$

On reconnaît la composée (dans n'importe quel ordre)

— d'une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$;

— d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. **a.** Les affixes sont respectivement : 0 ; 1 ; $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$; $\dfrac{3}{2}+\text{i}$.

   b. On a $u_n = \Omega A_n = |z_n - z_\Omega|$.

   Or d'après la question 1., $z_{n+1}-z_\Omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left[z_n - z_\Omega\right]$, soit en prenant les modules :

   $|z_{n+1}-z_\Omega| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left[z_n - z_\Omega\right]\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|\times\left|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right|\times|z_n - z_\Omega| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 1\times|z_n - z_\Omega|$,

   ou encore $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de premier terme $u_0 = \Omega A_0 = \Omega\text{O} = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).

   Il en résulte que$u_n = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   c. D'après l'expression de u_n, tous les termes de la suite sont non nuls et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$: la suite est donc décroissante.

   Donc s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 0,1$, tous les termes successifs vérifieront aussi cette inégalité.

   Or $u_{n_0} < 0,1 \iff \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} < 0,1 \iff \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0-1} < 0,1$, d'où d'après la croissance de la fonction logarithme népérien, $-(n_0-1)\ln\sqrt{2} < -\ln 10$

   $\iff \ln 10 < (n_0-1)\ln\sqrt{2} \iff \dfrac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} < n_0 - 1 \iff n_0 > 1 + \dfrac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} \approx 7,6$.

   Conclusion : le premier point appartenant au disque de centre Ω et de rayon 0,1 est le point A_8.

3. **a.** Le triangle $\Omega A_0 A_1$ est clairement rectangle isocèle en A_1.

   Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} :

   — *Initialisation* La propriété est initialisée pour $n = 0$.

   — *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ soit rectangle isocèle en A_n.

   Or le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est tout simplement l'image par la similitude du triangle $\Omega A_{n-1} A_n$: il est donc de même nature, soit rectangle isocèle en A_{n+1}.

   La propriété est vraie pour 0, et si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$

   D'après le principe de récurrence le le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ est rectangle isocèle en A_n quel que soit le naturel n.

   b. D'après la question précédente $\ell_n = A_0A_1 + \cdots + A_{n-1}A_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \cdots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, soit la somme des n premiers termes (exception faite de u_0) de la suite géométrique vue ci-dessus.

   On a donc $\ell_n = 1 \times \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1}$.

   Comme$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ell_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \mathbf{2+\sqrt{2}}$.

EXERCICE 3

Partie A

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{n}$, car on sait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P. On a donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - x_I &=& \lambda a \\ y - y_I &=& \lambda b \\ z - z_I &=& \lambda c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_I + \lambda a \\ y &=& y_I + \lambda b \\ z &=& z_I + \lambda c \end{array}\right.$$

qui est une équation paramétrique de la droite Δ.

2. D'après la question 1, H est un point de Δ, il vérifie donc lui aussi la relation de colinéarité :
$$\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

3. On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} x_H &=& x_I + ka \\ y_H &=& y_I + kb \\ z_H &=& z_I + kc \end{array}\right.$ mais comme H appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation du plan soit $a(x_Ik+a)+b(y_I+kb)+c(z_I+kc)+d=0 \iff k\left(a^2+b^2+c^2\right)+ax_I+by_I+cz_I+d=0 \iff k = -\dfrac{ax_I+by_I+cz_I+d}{a^2+b^2+c^2}$ (car $a,\ b$ et c ne sont pas simultanément nuls).

4. La relation vectorielle $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$ entraîne l'égalité des normes : $IH = |k|\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \dfrac{\left|ax_I+by_I+cz_I+d\right|}{a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{\left|ax_I+by_I+cz_I+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

1. On applique la partie A avec $I = \Omega$ et H point commun au plan $\mathcal{Q}$ et au plan P, le rayon de la sphère est donc
$IH = \Omega H = \dfrac{|1\times 1 - 1\times(-1) + 1\times 3 - 11|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

2. Un système d'équations paramétriques de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+\lambda \\ y &=& -1-\lambda \\ z &=& 3+\lambda \end{array}\right.$$

3. En reportant ces coordonnées dans l'équation de $\mathcal{Q}$ on obtient $1+\lambda+1+\lambda+3+\lambda-11=0 \iff 3\lambda-6=0 \iff \lambda=2$. En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite Δ on obtient :
$x=3\,;\ y=-3\,;\ z=5$. Le point commun à la sphère et au plan a pour coordonnées $(3\,;\,-3\,;\,5)$.

EXERCICE 4

Partie A

1. Soit f dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ et vérifiant
$f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln\left(f(t)\right)]$ (1). La fonction f étant strictement positive, la fonction $g = \ln f$ est bien définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g' = \dfrac{f'}{f} \iff f' = f \times g'$. Mais alors l'équation différentielle (1) s'écrit $fg' = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f] \iff$
$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$, car $f \neq 0$.

Inversement si la fonction $g = \ln f$ vérifie l'équation différentielle

$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$ (2), alors puisque $g' = \dfrac{f'}{f}$ existe comme dérivée de la fonction composée de f avec la fonction ln sur $[0 ; +\infty[$, l'équation (2) s'écrit :

$\dfrac{f'}{f} = \dfrac{1}{20}\ln f - \dfrac{3}{20} \iff f' = \dfrac{1}{20} f\ln f - f\dfrac{3}{20} = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f]$.

On a donc bien montré l'équivalence.

2. Les solutions de l'équation $z' = -\dfrac{1}{20}z$ sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$.

D'autre part une solution particulière constante de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ est le nombre $-\dfrac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3$.

Finalement les solutions de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ sont les fonctions

$t \longmapsto g(t) = 3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. D'après la question 1, les fonctions solutions de (E) sont les fonctions f telles que $g = \ln f \iff f = \exp(\mathrm{g})$.

Conclusion finale : les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions f telles que :

$$f(t) = \exp\left(3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $f(t) = \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$.

a. De $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = +\infty$, il résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$ et enfin que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0_+$.

b. On a $f'(t) = -\dfrac{3}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$ et comme les exponentielles sont strictement positives, f' est du signe de $-\dfrac{3}{20} < 0$. La fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ de 1 (millier) à 0.

c. $f(t) < 0,02 \iff \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right) < 0,02$ soit d'après la croissance de la fonction logarithme népérien $3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < \ln 0,02 \iff 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < -\ln 50 \iff 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > 3 + \ln 50 \iff \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > \dfrac{3+\ln 50}{3} \iff \dfrac{t}{20} > \ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) \iff$

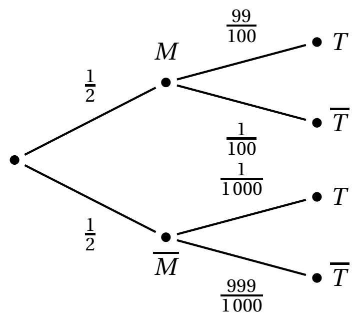
$t > 20 \times \ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right)$.

L'ensemble solution est donc $S = \left]20\ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) ; +\infty\right[$.

On a : 0,02 millier correspond à 20 individus. Comme $20 \times \ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) \approx 16,6$, la population sera inférieure à 20 individus à partir de la dix-septième année.

Partie B

1. On dresse un arbre pondéré :



On a $p(M) = \dfrac{1}{2}$; $p_M(T) = \dfrac{99}{100}$ $\quad p_{\overline{M}}(T) = \dfrac{1}{1\,000}$ (d'après l'énoncé)

2. On a $p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{99}{100} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1\,000} = \dfrac{991}{2\,000}$.

3. On a $p_T M = \dfrac{p(M \cap T}{p(T)} = \dfrac{\frac{99}{200}}{\frac{991}{2\,000}} = \dfrac{990}{991}$. Comme $\dfrac{990}{991} \approx 0{,}998\,99 < 0{,}999$, on en déduit que le test n'est pas fiable.