CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1 *(4 points)*
Commun à tous les candidats

0,25 point 1. *a.* Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

0,25 point *b.* On vérifie par exemple que A et B appartiennent à P.

0,5 point 2. *a.* Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

0,5 point *b.* Cette droite est dirigée par un vecteur normal au plan P. Un système d'équations est donc $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$.

0,5 point *c.* Cette distance est la distance de O à P. Elle est donnée par $d = \dfrac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{4}{3}$.

0,5 point *d.* Le volume de ce tétraèdre est donné par $v = \dfrac{1}{3} d \dfrac{1}{2} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$, puisque le triangle ABC est rectangle. On trouve $v = \dfrac{8}{3}$.

0,25 point 3. *a.* La somme des poids n'est pas nulle.

0,5 point *b.* Le barycentre du système S est en effet le même que celui de $S' = \{(O,3),(I,3)\}$, d'après la propriété dite associativité. On peut même ajouter que G est le milieu de $[OI]$.

0,25 point *c.* Cette dernière remarque permet de conclure (droite des milieux) que la distance de G au plan P est la moitié de la distance de O à P. Elle est donnée par $d' = \dfrac{2}{3}$.

0,5 point 4. La relation $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5$ s'écrit aussi $\left\|5\overrightarrow{MG}\right\| = 5$, où encore $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 1$. Γ est donc la sphère de centre G et de rayon 1. La distance de son centre G au plan P étant inférieure à son rayon, l'intersection de la sphère et du plan est un cercle.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1 point 1. Pour M distinct de Ω, le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a donc pour module 1 et pour argument θ. Sa forme exponentielle est donc : $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$, d'où le résultat, qu'il faut compléter en vérifiant que la formule donnée tient pour $z = \omega$.

1 point

2. *a.* De l'écriture $z' - (2+2\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(z - (2+2\mathrm{i})\right)$, on déduit :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(1+\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

0,5 point

b. On trouve $z_A = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1 point (à répartir)

c. Le calcul de $z_A - z_I$ donne : $z_A - z_I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $|z_A - z_I| = \sqrt{2}$ et donc $IA = IB = IO$. Les points O, A et B sont situés sur le cercle de diamètre $[OB]$ et le triangle OAB est rectangle en A. Le triangle OAB est un « demi-triangle équilatéral ». L'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

0,25 point

d. Une mesure de $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$ est donc $\frac{\pi}{3}$.

0,5 point

3. *a.* $z_{A'} = z_A - 1 - \mathrm{i}$

$$z_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

0,25 point

b. Par définition de la translation, le quadrilatère $OIAA'$ est un parallélogramme.

0,5 point

c. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right)$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, d'où le résultat.

Exercice 2 *(5 points)*

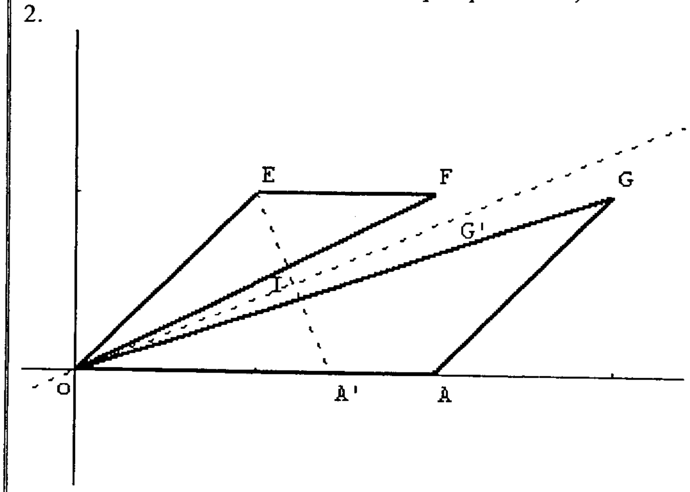
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1 point

1. On note E, F et G les images de A, B et C par s. La similitude réciproque de s est notée σ. Le produit des similitudes s' et σ possède trois points invariants, c'est donc l'identité. Dons s' est la réciproque de σ, c'est-à-dire s.

figure 1 point

2.



1 point

$$OA = 2 \qquad OE = \sqrt{2}$$

a. On obtient $OG = \sqrt{10} \quad OF = \sqrt{5}$. Les triangles sont donc semblables (le rapport

$$AG = \sqrt{2} \qquad EF = 1$$

des côtés homologues est $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

1 point

b. On procède par identification en cherchant une écriture du type $z' = \alpha\bar{z} + \beta$. On trouve $\beta = 0$ puis $\alpha = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$.

1 point

c. Par l'homothétie h, les sommets du triangle OAG sont transformés en ceux du triangle $OA'G'$. Reste à vérifier que la droite (OI) est la médiatrice de $[EA']$ et de $[FG']$, pour prouver que le triangle OEF est l'image de OAG par le produit $\sigma \circ h$.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

1,25 point (dont tableau)

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables. Elle est dérivable, sa fonction dérivée est définie sur $[0, +\infty[$ par $f'(x) = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$. Elle est décroissante sur $[0, +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est 0 (résultat classique en posant $X = x + 3$).

0,75 point

2. *a*. Cet encadrement résulte de la décroissance de f.

0,75 point

b. Cet encadrement résulte de la comparaison des intégrales sur l'intervalle $[n, n+1]$, des fonctions constantes égales respectivement à $f(n+1)$ et $f(n)$ et de la fonction f.

0,75 point

c. Les suites de terme général $f(n+1)$ et $f(n)$ respectivement sont convergentes ; elles convergent vers 0. Le théorème d'encadrement permet de déduire que la suite (u_n) converge également vers 0.

0,5 point

3. *a*. La fonction F est une puissance d'une fonction dérivable. Pour tout réel positif x, on peut écrire : $F'(x) = 2f(x)$.

0,5 point

b. $I_n = \frac{1}{2}\int_0^n 2f(x)\,\mathrm{d}x$.

Donc $I_n = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_0^n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2\right)$.

0,5 point

4. D'après les propriétés de l'intégrale, $S_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = I_n$.

La suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

0,5 point

1. L'événement contraire de A a pour probabilité $(0,9)^{50}$. La probabilité de A est donc $1-(0,9)^{50} \simeq 0,995$ (valeur arrondie au millième).

L'événement B est la réunion des événements « 2 personnes répondent », « une personne répond » et « personne ne répond ». On a donc :

$$P(B)=\binom{50}{2}(0,9)^{48}(0,1)^2+50(0,9)^{49}(0,1)+(0,9)^{50}$$

0,75 point

On obtient $P(B)\simeq 0,113$ (valeur arrondie au millième).

L'événement C est l'événement contraire de B, sa probabilité est donc :

0,25 point

$P(C)=1-P(B)\simeq 0,887$

0,75 point

2. *a.* Cet événement est l'événement contraire de la réunion de trois événements (personne ne répond, une personne répond, deux personnes répondent). Il suffit d'appliquer la définition de la loi de probabilité donnée.

1 point

b. $f(5)=1-\mathrm{e}^{-5}(1+5+12,5)\simeq -0,875$ (valeur arrondie au millième). Ce résultat est assez proche de celui obtenu avec le modèle binomial.

1,25 point (avec tableau)

3. *a* .La fonction f est dérivable et on a pour tout réel positif x, $f'(x)=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x}$. Cette fonction est donc croissante, sa limite en $+\infty$ est 1.

1 point

b. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. On a $f(6,29)<0,95$ et $f(6,3)>0,95$. Tout réel inférieur à $6,29$ a une image inférieure à $0,95$, tout réel supérieur à $6,3$ a une image supérieure à $0,95$. On achève le raisonnement par un théorème de bijection sur l'intervalle fermé $[6,29;6,3]$.

0,5 point

c. Il est nécessaire d'interroger un minimum de 63 personnes pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure à $0,95$.