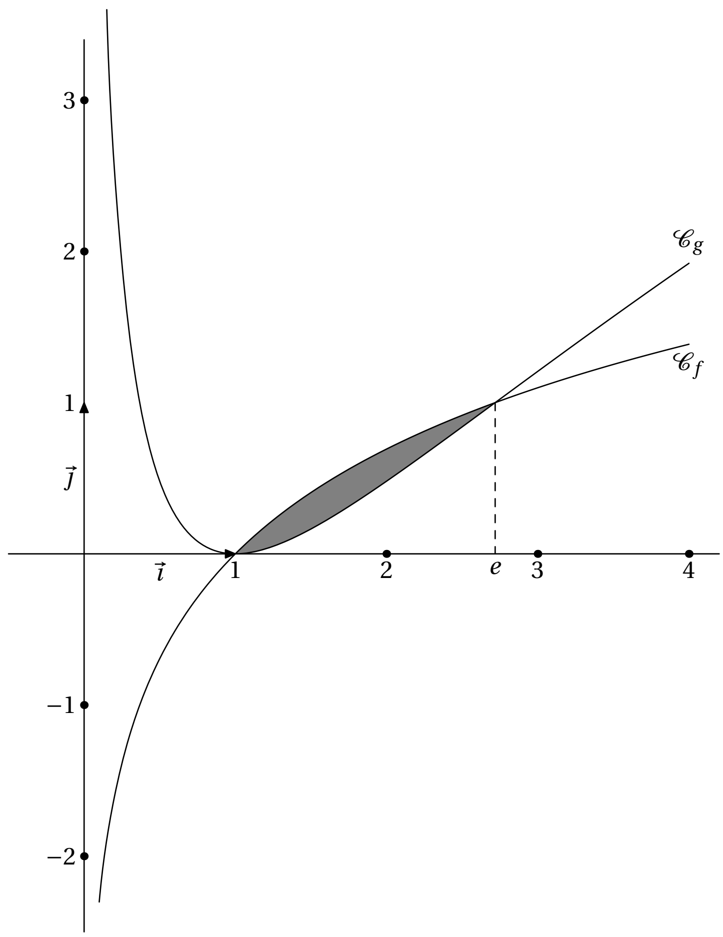
Baccalauréat S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

19 juin 2008, 4 heures

Exercice 1 5 points

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan grisée.
   On note $\text{I} = \displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$ et $\text{J} = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\, dx$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $\text{F}(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\text{J} = e - 2\text{I}$.
   (c) En déduire J.
   (d) Donner la valeur de $\mathscr{A}$.

2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 2 — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points

$$A(1\ ;\ 1\ ;\ 0), B(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } C(3\ ;\ -1\ ;\ 2).$$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.
   Démontrer que l'intersection des plane (P) et (Q) est une droite $(\mathscr{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 3 — 5 points

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution Organisée de Connaissances
   (a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
   (b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.
   (a) Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
   (b) Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.
   (c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 4 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$ et 2.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M$'$ est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des pointsA$'$ et B$'$, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4. (a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.
   (b) En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$,

(c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5. Soient E le point d'affixe $2+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

   (a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}\right)$.

   (b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)$.

   (c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Correction

Exercice 1 5 points

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$

1. On cherche à déterminer l'aire $\mathscr{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan grisée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.
   (a) $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$, donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[1; e]$.
   $$I = \int_0^e \ln x dx = [x \ln x - x]_0^e = 1$$
   (b) Intégration par parties :
   $$\left\{\begin{array}{lll} u(x) = (\ln x)^2 & ; & u'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x \\ v'(x) = 1 & ; & v(x) = x \end{array}\right\} \text{donc } J = \left[x(\ln x)^2\right]_0^e - 2\int_0^e \ln x dx = e - 2I$$
   (c) $J = e - 2I = e - 2\displaystyle\int_0^e \ln x dx = e - 2[x \ln x - x]_0^e = e - 2.$
   (d) $\mathscr{A} = \left|\displaystyle\int_0^e \left|\ln x - (\ln x)^2\right| dx\right| = \displaystyle\int_0^e \left|\ln x - (\ln x)^2\right| dx = \displaystyle\int_0^e \left(\ln x - (\ln x)^2\right) dx = I - J = 1 - e + 2 = 3 - e \simeq 0,281.$
2. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note $M(x; \ln x)$ et $N(x; (\ln x)^2)$.
   $$MN(x) = \left|\ln x - (\ln x)^2\right| = \ln x - (\ln x)^2 \text{ car } (\ln x)^2 \leqslant \ln x \text{ sur } [1; e]$$
   $$MN'(x) = \frac{2}{x}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad MN'(x) > 0 \text{ si } x < \sqrt{e}$$

x	1		$\sqrt{e}$		e
$MN'(x)$		$+$	0	$-$	
$MN(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

   Ainsi, $MN(x)$ possède un maximum pour $x = \sqrt{e}$. La valeur maximal est $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points

$$A(1 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 1) \text{ et } C(3 ; -1 ; 2).$$

1. (a) A, B et C ne sont pas alignés :
   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Les coordonnées ne sont pas proportionnelles.}$$
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés ; ils déterminent ainsi un plan.

(b) Pour démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$, il suffit de vérifier que les coordonnées des points A, B et C, non alignés, vérifient l'équation proposée :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\times 1+1\times 1-1\times 0-3=0 \\ 2\times 1+1\times 2-1\times 1-3=0 \\ 2\times 3+1\times(-1)-1\times 2-3=0 \end{array}\right.$$

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.
Intersection des plane (P) et (Q) :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=z+4 \\ 2x+3y=2z+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+4y=2z+8 \\ 2x+3y=2z+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=z+4 \\ y=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2+z \\ y=3 \end{array}\right.$$

En posant $z=t$, on obtient une représentation paramétrique est la droite $(\mathscr{D})$, intersection des deux plans :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$$

3. $(\text{ABC})\cap((\text{P})\cap(\text{Q}))=(\text{ABC})\cap(\mathscr{D})$:

$$\text{M}(x;y;z)\in(\text{ABC})\cap(\mathscr{D}) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z-3=0 \\ x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2(-2+t)+3-t-3=0 \\ x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=4 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{array}\right. \implies \text{M}(2;3;4)$$

Distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$:
Pour tout point M de la droite $(\mathscr{D})$, $\text{AM}^2=(-2+t-1)^2+(3-1)^2+(t-0)^2=2t^2-6t+13$.
$(2t^2-6t+13)'=4t-6$; le minimum de ce polynome du second degré (cœfficient de x^2 positif) est obtenu pour $t=\dfrac{3}{2}$.
Ainsi, la distance de A à la droite $(\mathscr{D})$ est :

$$d(\text{A},\mathscr{D})=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+4+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Exercice 3 — 5 points

On rappelle que pour tout $t\geqslant 0$, $\text{P}(\text{X}\leqslant t)=\displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $\text{R}(t)=\text{P}(\text{X}>t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution Organisée de Connaissances

(a) Pour tout $t\geqslant 0$ on a :

$$\text{R}(t)=\text{P}(\text{X}>t)=1-\text{P}(\text{X}\leqslant t)=1-\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=e^{-\lambda t}$$

(b) La variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s\geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s)$ ne dépend pas du nombre $t\geqslant 0$:

$$\text{P}_{\text{X}>t}(\text{X}>t+s)=\frac{\text{P}((\text{X}>t+s)\cap(\text{X}>t))}{\text{P}(\text{X}>t)}=\frac{\text{P}(\text{X}>t+s)}{\text{P}(\text{X}>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}$$

2. Dans cette question, on prend $\lambda=0,00026$.

(a) $\text{P}(\text{X}\leqslant 1000)=1-\text{R}(1000)=1-e^{-0,00026\times 1000}=1-e^{-0,26}\simeq 1-0,77105=0,2289\simeq 0,229$
$\text{P}(\text{X}>1\ 000)=e^{-0,00026\times 1000}=e^{-0,26}\simeq 0,771$.

(b) Sachant que l'évènement (X > 1 000) est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement (X > 2 000).

$$\begin{aligned}P_{X>1000}(X>2000) &= \frac{P((X>2000)\cap(X>1000))}{P(X>1000)} = \frac{P(X>2000)}{P(X>1000)}\\ &= \frac{e^{-0,00026\times 2000}}{e^{-0,00026\times 1000}} = e^{-0,00026\times(2000-1000)} = e^{-0,26} \simeq 0,771\end{aligned}$$

(c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures est donné par :

$$\begin{aligned}P_{X>2000}(X\leqslant 3000) &= \frac{P((X>2000)\cap(X\leqslant 3000))}{P(X>2000)} = \frac{1-P(X<2000)-P(X\geqslant 3000)}{P(X>2000)}\\ &= \frac{1-\displaystyle\int_0^{2000}\lambda e^{-\lambda x}dx - e^{-3000\lambda}}{P(X>2000)} = \frac{1-1+e^{-2000\lambda}-e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}} = 1-e^{-1000\lambda}\\ &= 1-e^{-0,26} = 1-0,771 = 0,229\end{aligned}$$

On aurait pu prévoir ce résultat d'après la question **1. b**. En effet,

$$P_{X>2000}(X\leqslant 3000) = 1-P_{X>2000}(X>3000) = 1-e^{-0,00026\times(3000-2000)} = 1-e^{-0,26} \simeq 1-0,771 = 0,229$$

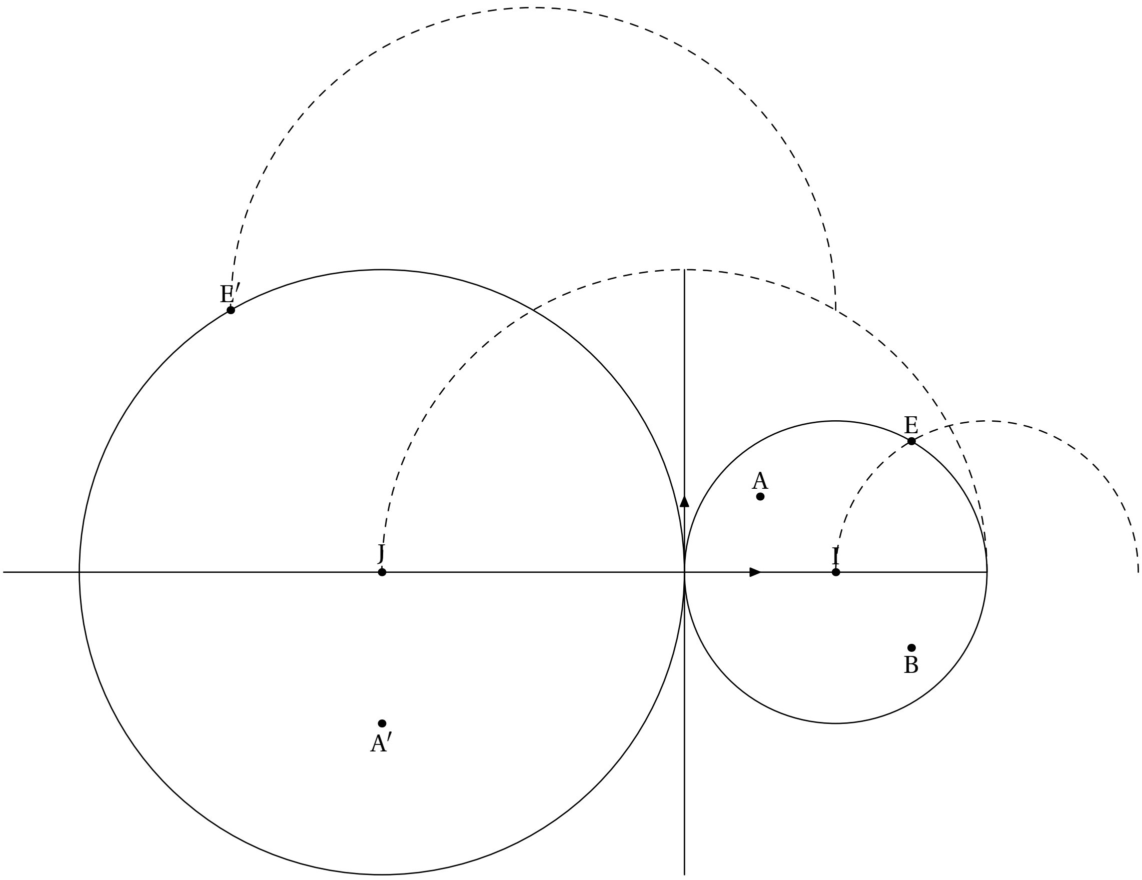
Exercice 4 — 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+i$, $3-i$ et 2.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Figure :



2. Affixes des pointsA′ et B′, images respectives des points A et B :

$$a' = (1+i)^2 - 4(1+i) = -4-2i \quad ; \quad b' = (3-i)^2 - 4(3-i) = -4-2i$$

On remarque que A′ = B′.

3. Points qui ont pour image le point d'affixe -5 :
Dire que M a pour image le point d'affixe -5 signifie que : $z^2-4z=-5 \iff z^2-4z+5=0$.
C'est une équation du second degré. $\Delta = 16-20=(2i)^2$.
D'où les solutions sont $z_1=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$ et $z_2=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$.
4. (a) Pour tout nombre complexe z, on a : $z'+4=z^2-4z+4=(z-2)^2$.
 (b) Ainsi :
 $\left|z'+4\right|=|z-2|^2$ et, lorsque z est différent de 2, $\arg\left(z'+4\right)=2\arg(z-2)$.
 (c) Dire que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 signifie que $|z-2|=2$.
 Donc $\left|z'+4\right|=|z-2|^2=4$, ce qui signifie que M$'$ appartient au cercle de centre le point I$'$ d'affixe -4 et de rayon 4.
5. E le point d'affixe $2+2e^{i\frac{\pi}{3}}=2+2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=3+i\sqrt{3}$
Affixe de E$'$: $e'=\left(3+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(3+i\sqrt{3}\right)=-6+2i\sqrt{3}$
 (a) Distance IE : $\text{IE}=|e-2|=\left|2+2e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|=\left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=2\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=2$;
 Mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{IE}}\right)$: $\arg(e-2)=\arg\left(2+2e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right)=\arg\left(2\times\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right)=\dfrac{\pi}{3}$.
 (b) Distance JE$'$: $\text{JE}'=\left|-6+2i\sqrt{3}+4\right|=\left|-2+2i\sqrt{3}\right|=4\times\left|-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=4$;
 Mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)$: $\arg\left(4\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.
 ou plus simplement :
 $$\text{JE}'=\left|e'+4\right|=|e-2|^2=2^2=4 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{\text{JE}'}\right)=\arg(e'+4)=2\times\arg(e-2)=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$
 (c) Construction : le point E est sur le cercle de centre I et de rayon 2 ; son image E$'$ est donc sur le cercle de centre J et de rayon 4.