

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Une analyse par compétences est proposée pour guider les correcteurs après l'exercice 4

**Exercice 1 (4 points)
 Commun à tous les candidats**

- 0,5 1. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, e^x existe et est différent de 1, donc f est bien définie sur $[1, +\infty[$. De plus, comme quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$, f est continue sur $[1, +\infty[$ donc la fonction H est bien définie sur $[1, +\infty[$.
- 0,25 b. f étant continue sur $[1, +\infty[$, H est la primitive de f qui s'annule en 1.
- 0,5 c. Pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $x > 0$ et $e^x - 1 > 0$, donc f est continue et positive sur $[1, +\infty[$. $H(3)$ est donc l'aire du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

0,5 2. a. Pour tout réel $x > 0$, $x \times \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}(e^x-1)}$ donc $x \times \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1}$.

b. On intègre par parties l'intégrale $\int_1^3 f(x) dx$ en posant :

1
$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} & v(x) = \ln(1-e^{-x}) \end{cases}$$
, les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur $[1; 3]$.

On obtient $\int_1^3 f(x) dx = [x \ln(1-e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 \ln(1-e^{-x}) dx$, c'est-à-dire

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x}) dx.$$

- 0,5 c. Si $1 \leq x \leq 3$, alors $-3 \leq -x \leq -1$ et, par croissance sur \mathbf{R} de la fonction exponentielle $e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1}$, donc $1 - \frac{1}{e} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{e^3}$. Par croissance sur $]0; +\infty[$ de la

fonction logarithme népérien, $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

3. $1 < 3$ donc, de l'encadrement précédent et en intégrant sur $[1; 3]$ les fonctions considérées, on déduit : $2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

En utilisant l'égalité obtenue à la question 2. b., on en déduit ensuite que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

0,25 + 0,5
 Voir
 l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page

Exercice 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit r la rotation d'angle α et de centre Ω d'affixe ω et soit M un point d'affixe z dont l'image par r est le point M' d'affixe z' .

- Si M et Ω sont confondus, alors M' et Ω sont aussi confondus donc la relation $z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$ est vérifiée.

- Si M et Ω sont distincts, alors M' et Ω sont distincts et M' est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{array} \right. , \text{ ce qui équivaut à } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{array} \right. , \text{ c'est-à-dire}$$

$$z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega).$$

Réciproquement soit r une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$.

1,25

- Si M et Ω sont confondus, alors M' et Ω sont aussi confondus et le point M' est bien l'image de M par la rotation d'angle α et de centre Ω d'affixe ω .

- Si M et Ω sont distincts, alors la relation $z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$ étant équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{array} \right. , \text{ le point } M' \text{ est bien l'image de } M \text{ par la rotation d'angle } \alpha \text{ et de centre } \Omega \text{ d'affixe } \omega.$$

La rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est bien la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$.

Partie B

0,75

1. a. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ et $\arg z_A = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi), \quad \arg z_B = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi),$
 $\arg z_C = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$ et $\arg z_D = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi).$

0,5

b. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ donc les points A, B, C et D sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2. De plus, soit J, I, K, L les points d'affixes respectives $2, 2i, -2$ et $-2i$. Alors A est le point d'abscisse négative situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; L]$, B est le point d'ordonnée négative situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; I]$, C est le point d'abscisse positive situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; J]$ et D est le point d'ordonnée positive situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; K]$.

c. $z_A + z_C = -\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i = 0$ donc O est le milieu du segment $[AC]$. On montre de même que O est le milieu du segment $[BD]$. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

1

De plus $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont donc perpendiculaires et de même longueur. $ABCD$ est donc un carré.

0,5 2. a. $E = r(A)$ donc on obtient E en construisant un triangle BAE équilatéral et indirect. De même le triangle BCF est équilatéral indirect.

0,5 b. L'écriture complexe de r est donnée par $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$ soit $z' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}z + 2$.

0,5 c. En remplaçant z par z_A , on obtient $z_E = 2 - \sqrt{3} + i$.

Voir

*l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page*

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit A, B, A' et B' quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' . On appelle $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ leurs affixes respectives. Il existe alors une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' si et seulement il existe un unique couple (a, b) de complexes

1,25 tel que $a \in \mathbb{C}^*$ et $\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a z_B + b \end{cases}$. Ce système d'inconnue (a, b) a pour déterminant $z_A - z_B$, qui

est non nul car $A \neq B$. Il admet donc une unique solution. De plus $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$ et $A' \neq B'$ donc $a \neq 0$. Il existe donc bien une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

0,75 1. a. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ et $\arg z_A = -\frac{5\pi}{6} (2\pi), \arg z_B = -\frac{\pi}{3} (2\pi),$
 $\arg z_C = \frac{\pi}{6} (2\pi)$ et $\arg z_D = \frac{2\pi}{3} (2\pi)$.

0,5 b. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ donc les points A, B, C et D sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2. De plus, soit J, I, K, L les points d'affixes respectives 2, $2i, -2$ et $-2i$. Alors A est le point d'abscisse négative situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; L]$, B est le point d'ordonnée négative situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; I]$, C est le point d'abscisse positive situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; J]$ et D est le point d'ordonnée positive situé à l'intersection du cercle (C) et de la médiatrice du segment $[O; K]$.

c. $z_A + z_C = -\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i = 0$ donc O est le milieu du segment $[AC]$. On montre de même que O est le milieu du segment $[BD]$. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

1

De plus $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont donc perpendiculaires et de même longueur. $ABCD$ est donc un carré.

- 0,5 2. a. $\left| e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$ et $\arg e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3}$ donc g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Son centre a pour affixe la
- 0,5 solution de l'équation $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$ soit $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.
- 0,5 g est donc la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre B .
- 0,5 *Voir l'analyse par compétences en dernière page*
- b. E, F et J sont obtenus en construisant trois triangles équilatéraux directs : BAE, BCF et BOJ .
- c. On constate que E, J et F sont alignés.
- En utilisant l'écriture complexe de g , on obtient $z_E = 2 - \sqrt{3} + i$, $z_F = 2 + \sqrt{3} - i$ et $z_J = 2$.
- On a alors $z_E - z_J = \sqrt{3} - i$ et $z_F - z_J = -\sqrt{3} + i$.
- En remarquant que $z_F - z_J = -(z_E - z_J)$, on en déduit que les points E, J et F sont bien alignés.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

- 0,5 1. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D . Par associativité du barycentre, G est aussi l'isobarycentre de I (milieu de $[AB]$) et donc isobarycentre de A et B) et de J (milieu de $[CD]$) et donc isobarycentre de C et D). G est donc le milieu de $[IJ]$.
- On démontre de même que G est le milieu de $[KL]$ et de $[MN]$.
- Les droites $(IJ), (KL)$ et (MN) sont bien concourantes en G .
2. a. G est le milieu commun aux segments $[IJ]$ et $[KL]$. Le quadrilatère $IJKL$ est donc un parallélogramme.
- De plus, dans le triangle ABD , I et L sont les milieux respectifs des segments $[BA]$ et $[BD]$ donc
- 1 $IL = \frac{1}{2}BD$. De même, dans le triangle BAC , $IK = \frac{1}{2}AC$. Comme $AC = BD$, $IL = IK$.
- Le quadrilatère $IKJL$ est donc un losange.
- Comme $AB = CD, BC = AD$, on démontrerait de même que $IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.
- 0,25 b. $IKJL$ est un losange donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc les droites (IJ) et (KL) sont orthogonales.
- On admet que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
- 0,25 3. a. La droite (IJ) est orthogonale aux deux droites (KL) et (MN) qui sont deux droites du plan (MKN) sécantes en G . Donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .
- b. La droite (IJ) est alors orthogonale à toute droite de ce plan. La droite (IJ) est donc orthogonale à la droite (MK) .
- 0,5 On peut donc écrire $\vec{IJ} \cdot \vec{MK} = 0$.
- Or, dans le triangle ABC , M et K étant les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$,
- 0,25 $\vec{MK} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ donc $\vec{IJ} \cdot \vec{AB} = 0$. La droite (IJ) est donc orthogonale à la droite (AB) .
- De même, la droite (IJ) étant orthogonale au plan (MKN) et la droite (NK) étant incluse dans ce plan, (IJ) est orthogonale à (NK) et donc à (CD) qui lui est parallèle.
- 0,25 c. La droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) et passe par le milieu I du segment $[AB]$. Elle

0,5
 0,5
 Voir
 l'analyse
 par
 compétences
 en dernière
 page

est donc incluse dans le plan médiateur de $[AB]$. Elle est de même incluse dans le plan médiateur de $[CD]$. Le point G appartient à la droite (IJ) , donc G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. D'après le c, le point G est équidistant des points A, B, C et D . Il existe donc une sphère de centre G et passant par les points A, B, C et D .

Exercice 4 (7 points)
Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. La fonction f est dérivable sur $[0; 20]$ et sa dérivée f' est définie par $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - 2x)$.
 $f'(x) > 0$ si et seulement si $x < 10$.
 f est donc croissante sur $[0; 10]$ et décroissante sur $[10; 20]$.

x	0	10	20
$f(x)$	0	10	0

b. D'après ses variations, les extremums de la fonction f sont 0 et 10.

Pour tout réel x de $[0; 20]$, on a donc bien $f(x) \in [0; 10]$.

c. On trace d'abord sur le graphique la droite d'équation $y = x$.

2. $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{10} \times 1 \times (20 - 1) = 1,9$. On a donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.

Si, pour un entier n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, alors, la fonction f étant croissante et d'extremums 0 et 10 sur $[0; 10]$, $0 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq 10$, soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

De plus f est une fonction continue donc la limite l de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est solution de l'équation $l = f(l)$. Cette équation du second degré admet deux solutions 0 et 10. Comme $u_0 = 1$ et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante, $l = 10$.

Partie B

1. a. Si la fonction y ne s'annule pas, alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{y} (10 - y) \text{ soit } -z' = \frac{1}{20} (10z - 1) \text{ c'est-à-dire } z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions $x \mapsto C e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}$, où C est un réel quelconque.

2. D'après le 1. a, il existe un réel C tel que pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$g(x) = \frac{1}{C e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{10C e^{-\frac{1}{2}x} + 1}. \text{ La condition } g(0) = 1 \text{ se traduit par } 10C = 9, \text{ donc } g \text{ est}$$

définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 9e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45 e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2}$.

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10$. Cela signifie que, si le modèle reste fiable, le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat tendra vers 10 millions.

5. Le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera les 5 millions lorsque $g(x) > 5$, c'est-à-dire $9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 < 2$ soit $e^{-\frac{1}{2}x} < \frac{1}{9}$ soit, puisque $-\frac{1}{2} < 0$, $x > -2\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ ce qui s'écrit

$$x > 2\ln 9.$$

C'est donc au bout de 5 ans que le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera les 5 millions.

1
0,5
0,5
Voir
l'analyse
par
compétences
en dernière
page

Annexes

Figure Exercice 2

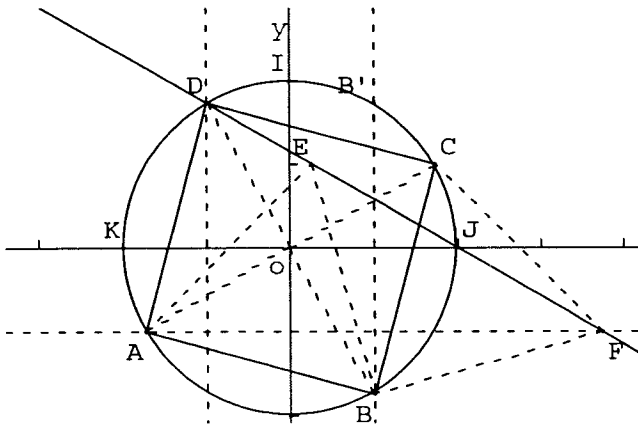


Figure Exercice 3

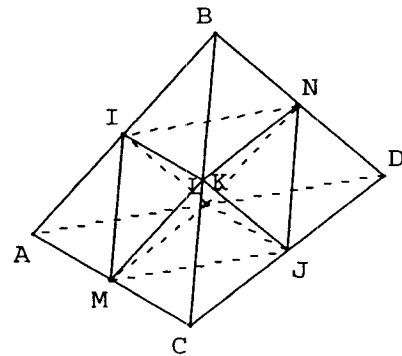
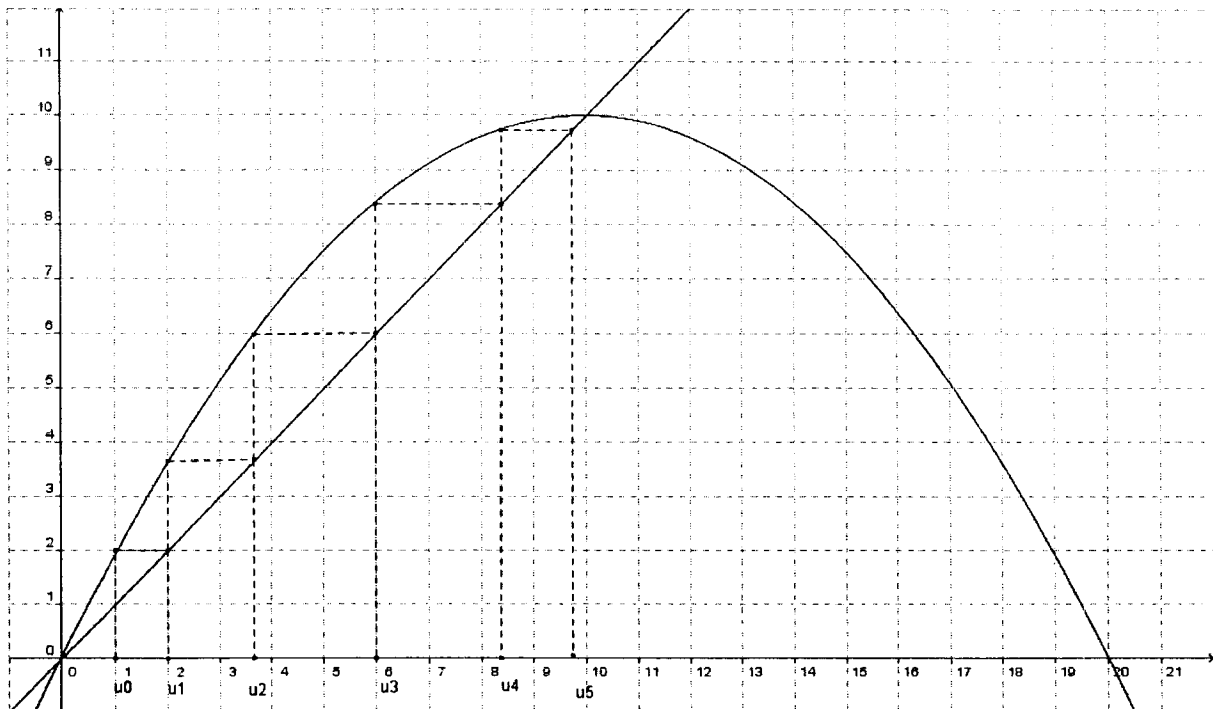


Figure Exercice 4



Prise en compte des compétences manifestées par les candidats

Rappelons que les correcteurs doivent s’efforcer de prendre en compte les compétences manifestées par les candidats dans les domaines suivants :

1. Restituer et mobiliser des connaissances
2. Appliquer une méthode
3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
4. Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
5. Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d’un résultat ou d’une méthode
6. Rechercher et organiser de l’information utile
7. Maîtriser la lecture et le traitement de l’information
8. Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement

Dans ce qui suit, chaque exercice a été analysé selon ces huit domaines. Dès lors qu’une des compétences 1 et 2 d’une part, 3, 4 et 5 d’autre part aura été identifiée par le correcteur, celui-ci n’hésitera pas à attribuer un nombre substantiel de points même si le calcul contient une erreur ou même si la démarche n’a pas abouti. Une question peut naturellement faire appel à des compétences diverses, ce dont les tableaux ci-dessous ne rendent pas nécessairement compte.

Exercice 1

Restituer et mobiliser des connaissances	Questions 1, 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d’un résultat ou d’une méthode	
Appliquer une méthode	Questions 1, 2, 3	Rechercher et organiser de l’information utile	Questions 2, 3
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l’information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Questions 2, 3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	Questions 2, 3

Exercice 2 (obligatoire)

Restituer et mobiliser des connaissances	Questions A, B-1 et B-2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	Question B-2
Appliquer une méthode	Question B-2	Rechercher et organiser de l'information utile	Questions B-1, B-2
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter	Question B-1	Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Question B-1	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	Question B-1

Exercice 2 (spécialité)

Restituer et mobiliser des connaissances	Questions A, B-1 et B-2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	Question B-2
Appliquer une méthode	Question B-2	Rechercher et organiser de l'information utile	Questions B-1, B-2
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter	Questions B-1, B-2	Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Questions B-1, B-2	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	Questions B-1, B-2

Exercice 3

Restituer et mobiliser des connaissances	Question 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode		Rechercher et organiser de l'information utile	Question 3
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter	Question 2	Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	Questions 2, 3
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Questions 1, 2 et 3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	Questions 1, 2 et 3

Exercice 4

Restituer et mobiliser des connaissances	Question B-1, B-4	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	Questions A-1, A-2, B-3	Rechercher et organiser de l'information utile	Questions A-2, A-3
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	Question B-5
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	Question B-1	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	Question B-3