Correction Bac ES – Liban – juin 2009

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

1) Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(x + 4) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 1)$ B : admet exactement une solution.

En effet, l'équation n'a de sens que si $\begin{cases} x+4>0 \\ x-2>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>2 \\ x>-0{,}5 \end{cases}$ donc, $x \in\ ]2\ ;+\infty[$.

Et pour tout $x \in\ ]2\ ;+\infty[$, $\ln(x + 4) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 1) \Leftrightarrow \ln[(x + 4)(x - 2)] = \ln(2x + 1)$

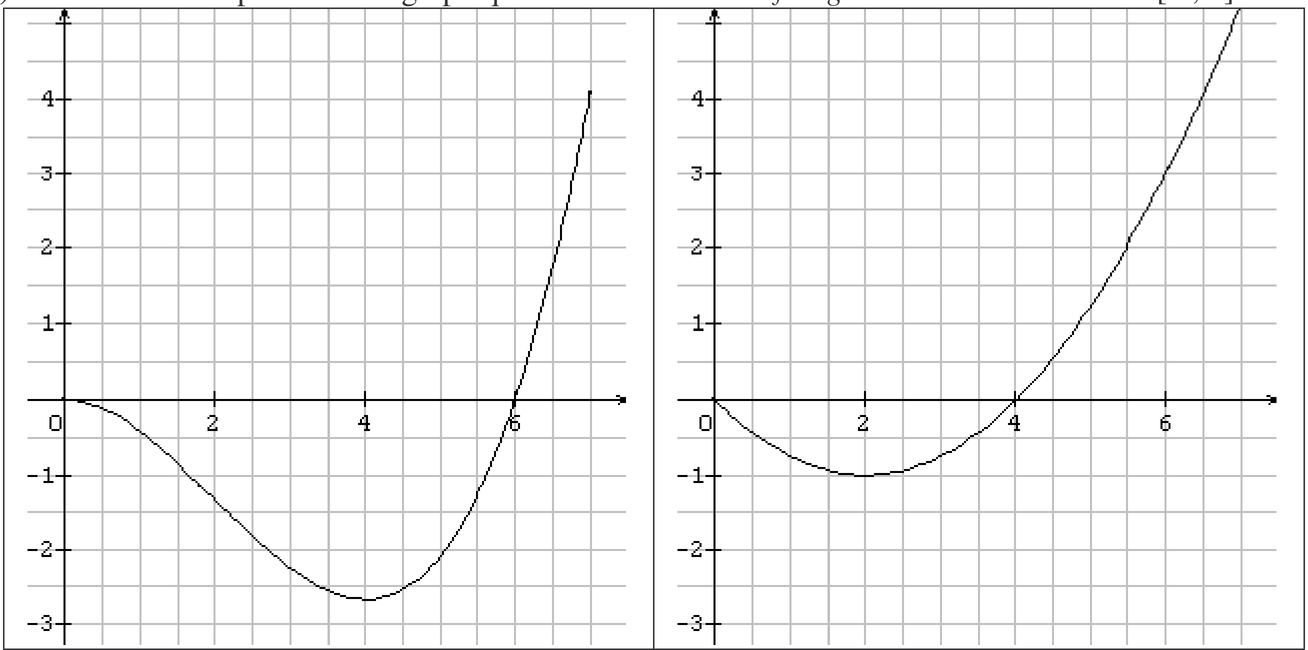
$$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$$

L'équation $x^2 - 9 = 0$ admet deux solutions -3 et 3.

Comme $-3 \notin\ ]2\ ;+\infty[$, l'équation $\ln(x + 4) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 1)$ admet une unique solution.

2) On connaît la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;7]$.



fonction f	fonction g

C : La fonction f est une primitive de la fonction g.

En effet, quand la fonction g est négative, la fonction f est décroissante et quand la fonction g est positive, la fonction f est croissante.

3) On sait que f est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. C : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\big(f(x)\big) = -\infty$.

En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et f est strictement positive et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$

donc, par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\big(f(x)\big) = -\infty$.

4) L'intégrale $\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$ est égale à : A : $e - 1$.

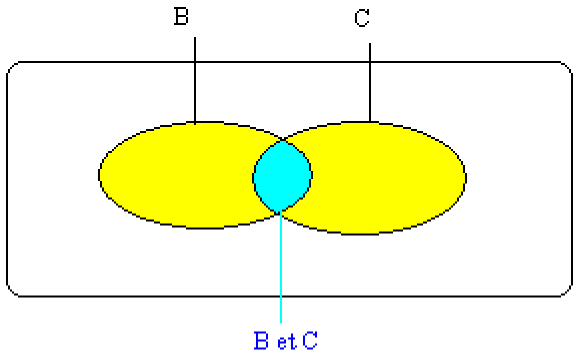
En effet, la fonction g définie par $g(x) = e^{-x}$ a pour primitive la fonction G définie par $G(x) = -e^{-x}$.

Donc, $\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = G(0) - G(-1) = -1 - (-e) = e - 1$.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On peut traduire la situation par le diagramme suivant :



On a les probabilités suivantes :
☞ 4 % de ces chemisiers présentent un défaut de coloris donc, p(C) = 0,04.
☞ 3 % des chemisiers ont un bouton manquant donc, p(B) = 0,03
☞ 2 % des chemisiers ont à la fois un défaut de coloris et un bouton manquant donc, p(B ∩ C) = 0,02.

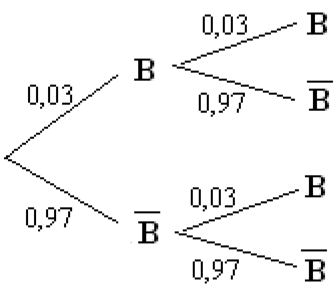
1) ☞ D : « cette cliente prend un chemisier ayant un moins un défaut »
On a : D = B ∪ C et donc, p(D) = p(B) + p(C) – p(B ∩ C) = 0,03 + 0,04 – 0,02 soit, p(D) = 0,05.

☞ E : cette cliente prend un chemisier ayant un seul défaut ».
L'événement E est représenté en jaune dans le dessin. On remarque que les événements E et B∩C forment une partition de l'événement D.
Donc, p(D) = p(E) + p(B ∩ C) soit, p(E) = p(D) – p(B ∩ C) = 0,05 – 0,02 et donc, p(E) = 0,03

☞ F : « cette cliente prend un chemisier sans défaut ».
On a : F = $\overline{D}$ et donc, p(F) = 1 – p(D) = 1 – 0,05 soit, p(F) = 0,95.

2) On cherche à calculer $p_C(B) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}04} = \dfrac{1}{2}$
Donc, sachant que la cliente s'intéresse à un chemisier ayant un défaut de coloris, la probabilité qu'il manque un bouton à ce chemisier est égale à 0,5.

3) Une autre cliente prend au hasard deux chemisiers dans le lot. Ces choix peuvent être assimilés à un tirage avec remise dans le lot de chemisiers. **On est donc dans un schéma de Bernoulli à deux épreuves**. On peut tracer l'arbre suivant :



Donc, la probabilité que sur les deux chemisiers choisis, un seul ait un bouton manquant est :
p = 0,03×0,97×2 = 0,0582.

4) a) La loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un chemisier est :

Valeurs possibles	40 €	20 % de 40 € 32 €	50 % de 40 € 20 €
Probabilités	p(F) = 0,95	p(E) = 0,03	p(B ∩ C) = 0,02

b) L'espérance mathématique de cette loi est : E = 40×0,95 + 32×0,03 + 20×0,02 = 39,36.
Donc, sur 100 chemisiers vendus, le propriétaire peut espérer obtenir 3 936 €.

EXERCICE 3 **(6 points)**

Commun à tous les candidats

Partie A : On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 10 + (x - 3)e^x$.

1) **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\,e^x = +\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = 10 + u(x)v(x)$ avec $u(x) = x - 3$ et $v(x) = e^x$.

Ainsi, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

D'où, $f(x) = e^x + (x-3)e^x$ soit, $f'(x) = (x-2)e^x$

Comme pour tout x réel, $e^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $(x - 2)$. D'où le tableau de signes suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

c) De la question précédente, on déduit que la fonction f est décroissante sur $[0\,;2]$ et est croissante sur $[2\,;+\infty[$. On a le tableau de variation suivant :

x	0		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	7	$\searrow$	$10 - e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

d) La fonction f a pour minimum $10 - e^2$ et $10 - e^2$ est positif. Donc, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

2) **a)** $G(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x - 4$ et $v(x) = e^x$

Donc, $G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

D'où, $G'(x) = 1\times e^x + (x-4)\times e^x = (x-3)\,e^x = g(x)$.

Donc, la fonction $G : x \longmapsto (x-4)e^x$ est une primitive de la fonction $g : x \longmapsto (x-3)e^x$.

b) On remarque que : $f(x) = 10 + g(x)$ et donc, une primitive sera $F(x) = 10x + G(x)$

Soit, $F(x) = 10x + (x-4)e^x$.

c) Par définition d'une primitive, $F'(x) = f(x)$.

Or, dans la question 1d, on a vu que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B :

1) La fonction C est une primitive de la fonction f et on sait que les primitives d'un même fonction diffèrent d'une constante. Donc, d'après la question A2b, on a : $C(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or, on sait que les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 20 000 euros et donc, $C(0) = 20$.
Ainsi, $F(0) + k = 20 \Leftrightarrow -4 + k = 20 \Leftrightarrow k = 24$.
Donc, le coût total est donné par : $C(x) = 10x + (x-4)\,e^x + 24$.

2) **a)** La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2\,;4]$ à valeurs dans l'intervalle $[f(2)\,;f(4)]$.

Or, $f(2) = 10 - e^2 \approx 2{,}6 < 11{,}292$ et $f(4) = 10 + e^4 \approx 64{,}6 > 11{,}292$

Donc, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 11{,}292$.

Ainsi, il est possible d'adapter la production pour obtenir un coût marginal de 11 292 €.

b) En utilisant les tables de valeurs de la calculatrice, on trouve : $3{,}06 < \alpha < 3{,}07$.

Donc, il faut produire 3 060 kg, à 10 kg près, pour obtenir un coût marginal de 11 292 €.

c) $\dfrac{C(3{,}06)}{3{,}06} \approx 11{,}292$. Donc, le coût moyen de fabrication est de 11 292 €.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la production d'énergie d'origine éolienne en France, exprimée en milliers de tonnes d'équivalent pétrole (Ktep) :

Année	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	2	3	4	5	6	7
Production y_i	7	23	34	51	83	188	348

Source : Insee avril 2008

1) a) $\dfrac{348-7}{7}\times 100 = 4\,871{,}4$. Donc, entre 2000 et 2007, la production a augmenté de 4 871,4 %.

b) Notons x le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation annuelle moyenne.

Alors, $x^7 = \dfrac{348}{7}$ soit, $x = \sqrt[7]{\dfrac{348}{7}} = 1{,}7472$ à 10^{-4} près.

Ainsi, le pourcentage d'augmentation annuel moyen de la production entre 2000 et 2007 est 74,72 %.

c) Avec ce pourcentage d'augmentation annuel moyen de 74,72 %, la production de 2005 serait de :

$7\times 1{,}7472^5 = 114$ à l'unité près.

On a : $\dfrac{114-83}{83}\times 100 = 37{,}35$ à 10^{-2} près.

Donc, le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur réelle est de 37,35 %.

2) Dans cette question, on se propose de réaliser un ajustement de type exponentiel. On pose $z = \ln y$.

a) On a le tableau suivant :

x_i	0	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	1,95	3,14	3,53	3,93	4,42	5,24	5,85

b) L'équation réduite de la droite de régression de z en x est : $z = 0{,}54x + 1{,}92$.

c) On a : $z = \ln(y)$ et $z = 0{,}54x + 1{,}92$ donc, $\ln(y) = 0{,}54x + 1{,}92$ d'où, $y = \exp(0{,}54x + 1{,}92)$

Soit, $y = e^{1{,}92}\times\left(e^{0{,}54}\right)^x$. Or, $e^{1{,}92} = 6{,}82$ à 10^{-2} près et $e^{0{,}54} = 1{,}72$ à 10^{-2} près.

Donc, on a bien : $y = 6{,}82\times 1{,}72^x$.

d) L'année 2005 a pour rang $x = 5$ et $6{,}82\times 1{,}72^5 = 103$ à l'unité près.

3) a) Le point de la courbe d'abscisse 9 a pour ordonnée 900.

Donc, pour l'année 2009, on peut estimer la production à 900 Ktep.

b) En 2007, la production a été de 348 Ktep.

La droite d'équation $y = 3480$ coupe la courbe au point d'abscisse 11,5 (environ).

C'est donc à partir de 2012 que la production de 2007 sera multipliée par 10.