Bac S – Antilles-Guyane – Septembre 2009

EXERCICE 1 : (4 points)

Commun à tous les candidats

VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

PARTIE A

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

PARTIE B

1. Si A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0 ; 1]$, alors $P(X \in [0{,}1 ; 0{,}6]) = 0{,}6$.
3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors

   $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A (1 ; –1 ; 4), B (7 ; –1 ; –2) et C (1 ; 5 ; –2).

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   c. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).
   d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire au plan (ABC).
   b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan (ABC) sont (3 ; 1 ; 0).
   c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

3. Soit $(\mathscr{S})$ la sphère de centre G passant par A.
   a. Donner une équation cartésienne de la sphère $(\mathscr{S})$.
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $(\mathscr{D})$ et de la sphère $(\mathscr{S})$.

<u>EXERCICE 3</u> : (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -11 + 4i$, $z_B = -3 - 4i$ et $z_C = 5 + 4i$.

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

   Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$.
   Placer le point E.

4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

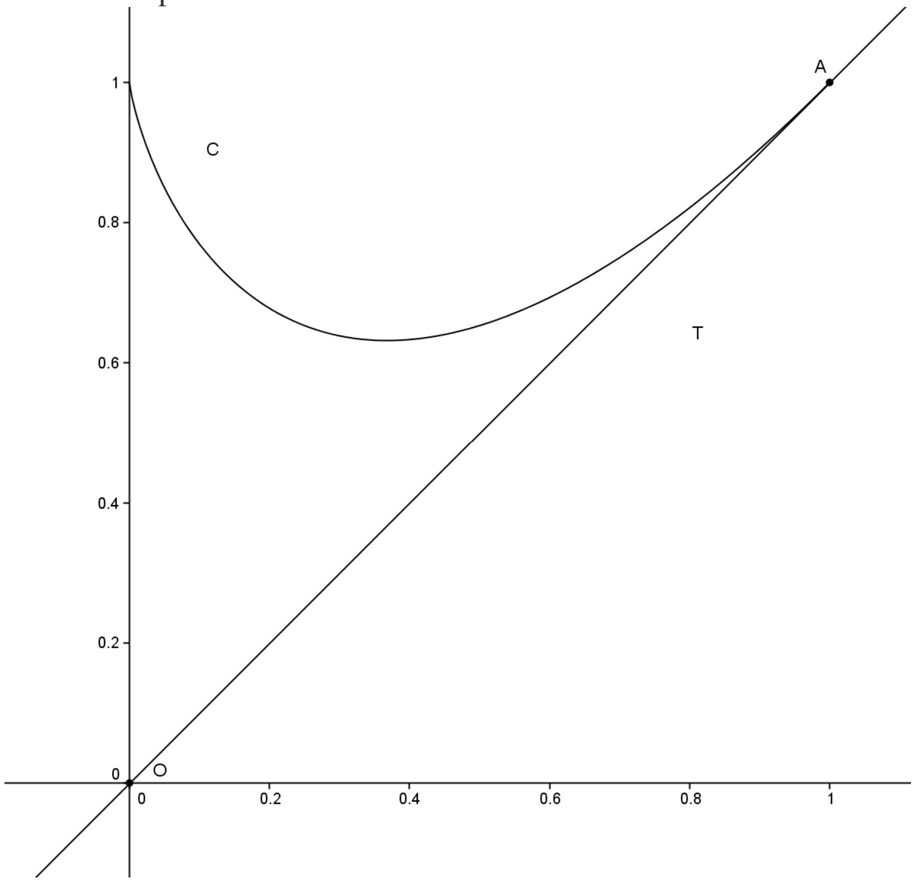
   Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Placer le point D.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit (Δ) la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite (Δ) et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
   Montrer que B, I et J sont alignés.

EXERCICE 4 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,1]$ par : $f(x) = 1 + x \ln x$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.
T est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. a. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
   b. En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0\,;\,1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in\ ]0\,;\,1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in\ ]0\,;\,1]$.
   b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in\ ]0\,;\,1]$ par $g(x) = 1 + x \ln x - x$.
   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et dresser le tableau de variation de g.
   On ne cherchera pas la limite de g en 0.
   b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 [1 - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.
   c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.
   d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et l'axe des ordonnées.