BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x^2+4)$.

PARTIE A

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[2\,;3]$ l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on notera α. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.

c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y=x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1) À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

2) Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.

3) **a)** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1\le u_n\le\alpha$.

b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

c) Déterminer sa limite.

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-1=0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y+z-2=0$.

Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

2) a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathscr{R}$ et de la droite $\mathscr{D}$, a pour coordonnées $(0\,;1\,;1)$.

3) Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $(1\,;1\,;0)$.

a) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathscr{R}$.

b) On appelle A' et B' les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
Justifier que le quadrilatère $ABA'B'$ est un losange.

c) Vérifier que le point S de coordonnées $(2\,;-1\,;3)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

d) Calculer le volume de la pyramide $SABA'B'$.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V=\dfrac{1}{3}\,b\times h$.

EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a-1$.

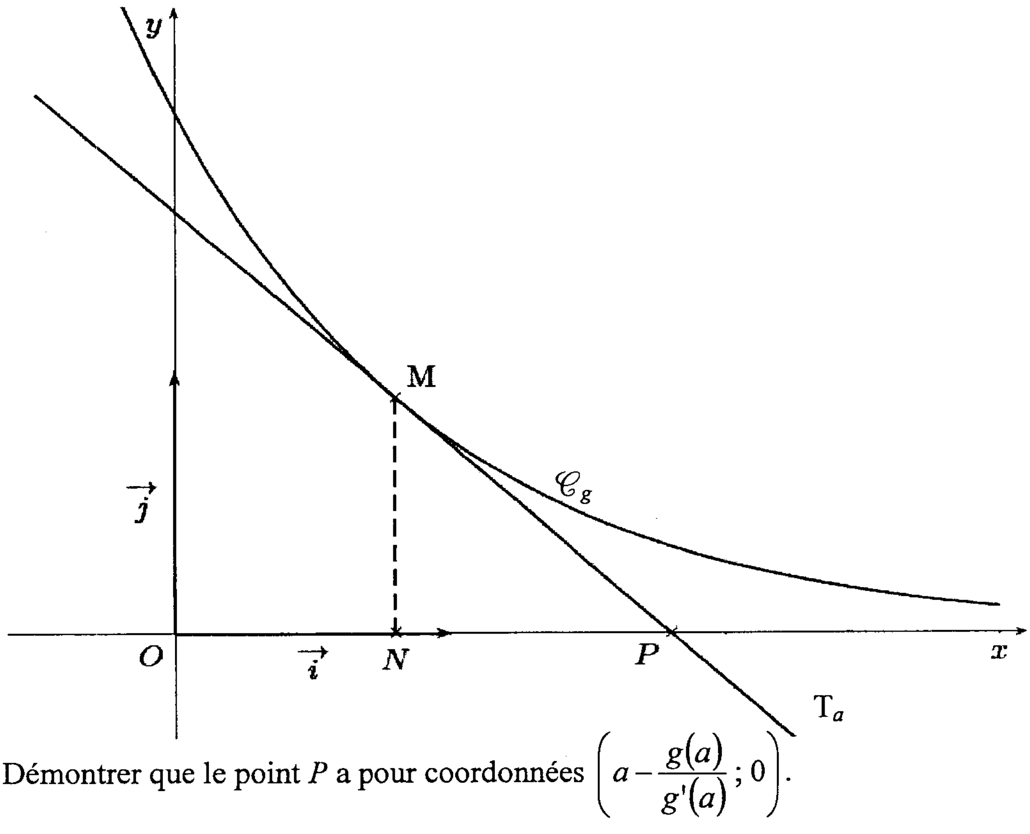
2) Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$.

PARTIE B

Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x.

On appelle $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.
Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la **partie B**



1) Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;0\right)$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{i}$?

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2) On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

a) Montrer que d_n divise 2^n.

b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.

En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

(À rendre avec la copie)