BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.

On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions

a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
   a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.
2. a) Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.
   b) Déterminer l'affixe z_F du point F.
   c) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.
   d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

EXERCICE 2 (3 points)

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres.
- on ne tient pas compte des passages par le point O.

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$.
2. On note E l'événement :
   « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I, X dans cet ordre ».
   Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.
3. On note F l'événement :
   « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les sommets S, I, X dans un ordre quelconque ».
   Déterminer la probabilité de F.

Partie B – Plusieurs robots

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement « au moins l'un de ces robots passe successivement par les sommets S, I, X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n,m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n-3\times 2^m=1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.

   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

   a) Montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1\,(\text{modulo}\,32)$.

   b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

   c) En déduire que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1\,(\text{modulo}\,5)$.

   d) Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples (n,m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

EXERCICE 4 (7 points)

L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)+1-x$.
   a) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

   Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1,+\infty[$ une unique solution notée α.

   b) Démontrer que $\ln(2\alpha)+1=\alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\ln(2u_n)+1$.
   On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(2x)+1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée en annexe page 6.

   a) En utilisant la courbe (Γ), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
   c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Cette courbe est donnée en annexe page 6.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :
   $$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$$
   a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1,+\infty[$, $F(x)=-xe^{1-x}+1$.
   c) Démontrer que sur $[1,+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=a$.
   Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aire, de D_a soit égale $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 4