CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu. <u>Une analyse par compétences est proposée pour guider les correcteurs après l'exercice 4</u>

Exercice 1 (*6 points*)
Commun à tous les candidats

Partie A

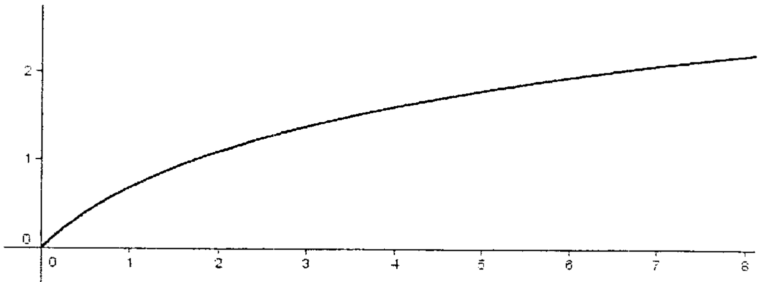
Partie A

0, 5 On calcule la différence des deux intégrales, c'est l'intégrale de la différence des fonctions, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction continue positive ; elle est donc positive.

Partie B

0, 25 1. *a.* On obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$ par composition.

0, 5
On peut utiliser les fonctions conjointes ou la dérivation.



b.

1
On valorisera la vérification des hypothèses du théorème

c. L'intégrale $I_1 = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale du produit de f_1 par la fonction constante égale à 1, qui peut être considérée comme la dérivée de $t \mapsto t$. Les conditions du théorème d'intégration par parties sont satisfaites et on a :

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - \left[t - \ln(1+t)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

0, 75 2. *a.* Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction f_n est positive et majorée par la fonction constante égale à $\ln 2$, d'où le résultat par intégration.

0, 5 *b.* Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier naturel n, on a : $x^n \geqslant x^{n+1}$. La fonction ln est croissante et l'intégrale conserve l'ordre, la suite (I_n) est donc décroissante.

0, 25 *c.* Elle est décroissante et minorée (par 0) donc convergente.

0, 75 3. *a.* La fonction g est décroissante (elle est dérivable de dérivée négative).

0,5 *b.* La fonction g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et prend en 0 la valeur 0. Elle est négative.

0,5 L'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$, vraie pour tout réel positif x, s'étend pour tout entier naturel n au réel x^n.

0,5 *c.* On peut donc majorer l'intégrale $I_n : I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$, ce qui prouve que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc que la suite I_n tend vers 0.

Exercice 2 (*5 points*)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1 point par affirmation justifiée. Note non nulle pour une justification partielle.

1. Un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal au plan. VRAI.
2. Les plans P et P' ayant des vecteurs normaux non colinéaires, ils sont sécants. Les égalités $4x-y+4z=2(x-2y+3z)+(2x+3y-2z)$ et $2\times3+6=12$ prouvent que tout point appartenant à P et P' appartient à P''. Les trois plans ont donc une droite en commun. FAUX.
3. Le point de coordonnées $(-5,0,-5)$ leur est commun. VRAI.
4. Les points A, B et C satisfont l'équation donnée. En outre ils ne sont pas alignés, donc définissent ce plan. VRAI.
5. Les points A, B et C ne sont pas alignés. FAUX .

Exercice 2 (*5 points*)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

0, 5 1. Immédiat en simplifiant par d^2.

0, 75 2. On en déduit que v divise u^2, et comme u et v sont premiers entre eux, que $v=1$.

0, 5 3. Il s'ensuit que $b=d=u^2$, puis que $a=du=u^3$.

1 4. On peut par exemple faire un catalogue : les restes possibles des carrés modulo 7 sont 0, 1, 2 et 4 ; les restes des cubes sont 0, 1 et 6. Les seuls éléments communs à ces deux listes sont 0 et 1.

Partie B

0, 75 1. Le graphique 1 correspond à $\lambda=0$, le graphique 2 à $\lambda<0$, et le graphique 3 à $\lambda>0$.

0, 75 2. On en trouve quatre, de coordonnées $(25,5,25),(5,25,25),(1,125,25),(125,1,25)$.

0, 75 3.

Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

0, 75 1. *a.* Le gain -1 correspond aux tirages d'une boule blanche et d'une boule rouge, dans les deux ordres possibles. Un arbre indique que la probabilité correspondante est

$$P(X=-1)=\frac{10}{10+n}\times\frac{n}{10+(n-1)}+\frac{n}{10+n}\times\frac{10}{(10-1)+n}$$, d'où le résultat.

0, 75 *b.* Les deux autres valeurs prises par X sont 4 et -6, correspondant à des événements de probabilités respectives :

$$P(X=-6)=\frac{n}{10+n}\times\frac{n-1}{10+(n-1)}=\frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$$

et $P(X=4)=\dfrac{10}{10+n}\times\dfrac{9}{9+n}=\dfrac{90}{(10+n)(9+n)}$;

0, 5

c. L'espérance mathématique correspondante est :
$E(X)=4\times P(X=4)+(-1)\times P(X=-1)+(-6)\times P(X=-6)$, d'où le résultat.

0, 25 à placer en c ou en d

En simplifiant par $(n+9)$, on obtient $E(X)=\dfrac{-6n+40}{n+10}$.

d. Cette espérance est positive pour $n\leqslant 6$.

0, 5

2. Il est équivalent d'écrire que la probabilité de l'événement contraire (ne tirer aucune boule rouge en 20 essais) est inférieure à 0, 001. On doit donc résoudre en nombres entiers :
$\left(\dfrac{10}{10+n}\right)^{20}\leqslant 10^{-3}$,

1 Valoriser les bonnes démarches

Qu'on transforme en : $n\geqslant \mathrm{e}^{\frac{23}{20}\ln 10}-10$, soit donc $n\geqslant 5$.

3. *a.* On fait le calcul de $P(Z\leqslant 50)=1-\mathrm{e}^{-0,5}$, dont un arrondi au centième est 0,39.

0, 5

b. Cette probabilité conditionnelle peut s'écrire $P(Z\leqslant 10)$, car il n'y a pas de vieillissement.

0, 75 pour les arguments

Et donc elle est égale à $1-\mathrm{e}^{-0,1}$, c'est-à-dire, arrondi au centième, 0,1.

Exercice 4 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

0, 5

1. On obtient $u_0=-1$, $u_2=-\dfrac{1}{3}, u_3=\dfrac{8}{9}$

1 On valorisera les bonnes démarches

2. *a.* et *b.* s'établissent par récurrence.

0, 5

c. La suite (u_n) est minorée par une suite arithmétique tendant vers $+\infty$, donc elle tend vers $+\infty$.

1

2. *a.* Pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1}=-2\left(\dfrac{1}{3}u_n+n-2\right)+3(n+1)-\dfrac{21}{2}$, et comme

$u_n=-\dfrac{1}{2}\left(v_n-3n+\dfrac{21}{2}\right)$, on obtient :

$v_{n+1}=-2\left(\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\left(v_n-3n+\dfrac{21}{2}\right)\right)+n-2\right)+3(n+1)-\dfrac{21}{2}$, soit $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$.

On a de plus $v_0=-\dfrac{25}{2}$

0, 5 *b.* $u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right)$ conduit au résultat demandé.

0, 5 *c.* Cette somme s'écrit : $S_n = \frac{25}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1)$.

Prise en compte des compétences manifestées par les candidats

Rappelons que les correcteurs doivent s'efforcer de prendre en compte les compétences manifestées par les candidats dans les domaines suivants :

1. Restituer et mobiliser des connaissances
2. Appliquer une méthode
3. Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter
4. Raisonner, démontrer, élaborer une démarche
5. Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode
6. Rechercher et organiser de l'information utile
7. Maîtriser la lecture et le traitement de l'information
8. Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement

Dans ce qui suit, chaque exercice a été analysé selon ces huit domaines. Dès lors qu'une des compétences 1 et 2 d'une part, 3, 4 et 5 d'autre part aura été identifiée par le correcteur, celui-ci n'hésitera pas à attribuer un nombre substantiel de points même si le calcul contient une erreur ou même si la démarche n'a pas abouti. Une question peut naturellement faire appel à des compétences diverses, ce dont les tableaux ci-dessous ne rendent pas nécessairement compte.

Exercice 1

Restituer et mobiliser des connaissances	A 1 et 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	B 2 *b*
Appliquer une méthode	A 2	Rechercher et organiser de l'information utile	A 1 *b*
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter	B 2 *b*	Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	A 1
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	B 1	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	B 1 *c*

Exercice 2 (obligatoire)

Restituer et mobiliser des connaissances	1 *a* 2 *a* 4 *a*	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	1 *c*	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	4 *b*	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	

Exercice 2 (spécialité)

Restituer et mobiliser des connaissances	1 2	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	2	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	3 *c* 4

Exercice 3

Restituer et mobiliser des connaissances	Toutes	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	Toutes
Appliquer une méthode	2, 3	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche		Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	

Exercice 4

Restituer et mobiliser des connaissances	1	Évaluer, critiquer un résultat, vérifier la validité d'un résultat ou d'une méthode	
Appliquer une méthode	2, 3	Rechercher et organiser de l'information utile	
Prendre des initiatives, choisir un modèle, émettre une conjecture, expérimenter		Maîtriser la lecture et le traitement de l'information	
Raisonner, démontrer, élaborer une démarche	3	Développer une démarche, mettre en forme un raisonnement	2, 3