BACCALAURÉAT GENÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

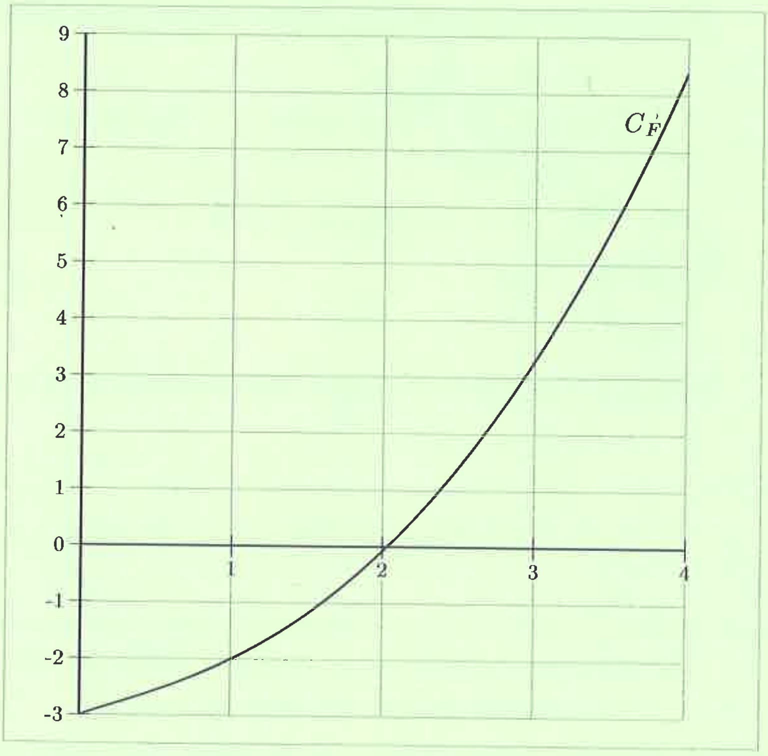
Indiquer sur la copie le numéro de la question et **la réponse choisie** correspondante.

1. Le prix d'un article a augmenté de 20 % puis baissé de 20 %. Ce prix :
   - a baissé de 2 %
   - a augmenté de 4 %
   - n'a pas bougé
   - a baissé de 4 %

2. La fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2(\ln x + 3)$ est la fonction f' définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   - $f'(x) = 2x\ln x + 7$
   - $f'(x) = 2x\ln x + 5x$
   - $f'(x) = x(2\ln x + 7)$
   - $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{x}$

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x - 1 \leq 0$ est :
   - $]-\infty\,;\,1]$
   - $]-\infty\,;\,\mathrm{e}]$
   - $]0\,;\,\mathrm{e}]$
   - $]0\,;\,+\infty[$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   La fonction F est une de ses primitives sur cet intervalle et la courbe représentative de la fonction F est tracée dans le repère ci-dessous :



L'intégrale $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

- $\dfrac{\ln 3}{3}$
- $\ln 3$
- $-\ln 3$
- $3\ln 3$

EXERCICE 2 (5 points)

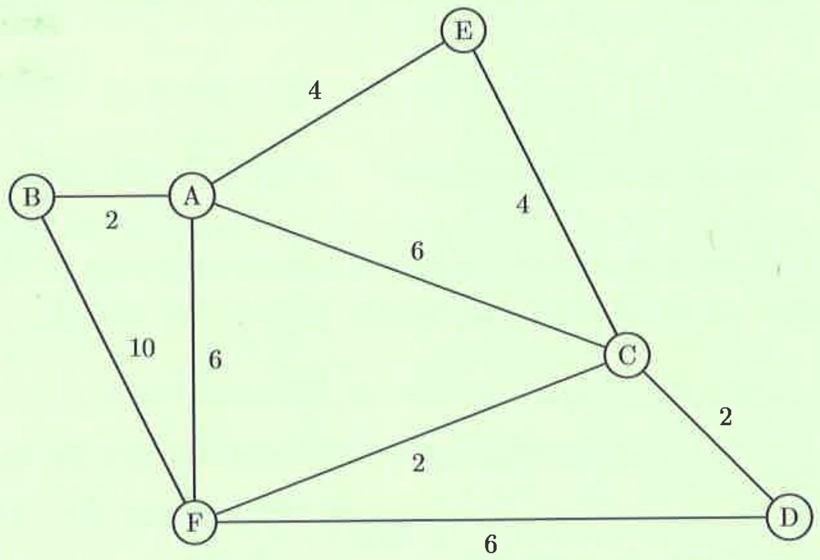
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.

Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes représentent les chemins.
Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.

Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.

Chaque fois qu'un candidat emprunte **pour la première fois** un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant de son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?

2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.

3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).

   (a) Ecrire la matrice M.

(b) On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins. Combien a-t-il de possibilités ?

(c) Donner, le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'opérateur téléphonique Boomtel propose à ses abonnés deux types d'accès internet à haut débit :

- un accès internet sur ligne fixe ;
- un accès 3G sur téléphone portable.

Aujourd'hui, l'entreprise fait les constats suivants sur les accès internet à haut débit de ses abonnés :

- 58 % des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe. Parmi ceux-là, 24 % ont également un accès 3G sur téléphone portable ;
- parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 3G sur téléphone portable.

Rappels de notation : Soient A et B deux événements,

- *la probabilité de l'événement A est notée $p(A)$;*
- *si $p(B) \neq 0$, $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé ;*
- *l'événement contraire de l'événement A est noté $\bar{A}$.*

Pour une enquête satisfaction, la fiche d'un abonné est prélevée au hasard.

Dans cet exercice, on note :

- F l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe » ;
- G l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès 3G sur téléphone portable ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(F)$, de $p_F(G)$ et de $p_{\overline{F}}(G)$.
2. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
3. Calculer $p\left(F \cap \overline{G}\right)$. Interpréter ce résultat.
4. (a) Vérifier que la probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable est de 0,8062.

   (b) Peut-on affirmer qu'au moins 25 % des abonnés ont un accès 3G sur téléphone portable ?
5. On prélève successivement les fiches de trois abonnés. On admet que le nombre de fiches est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler le tirage à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'exactement une des fiches tirées soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à une entreprise de détergents industriels. Elle produit chaque jour une quantité q en tonnes comprise entre 0 et 20. On rappelle que :

- le coût marginal $C_m(q)$ est la variation du coût obtenue par la production et la vente d'une tonne supplémentaire de détergent sachant qu'on en a déjà vendu une quantité de q tonnes.
- le bénéfice marginal $B_m(q)$ est la différence entre le prix de vente unitaire et le coût marginal $C_m(q)$.

Partie A : Aspect graphique

Dans le repère suivant, on donne :

- la courbe représentative Γ_m de la fonction C_m correspondant au coût marginal en milliers d'euros ;
- la courbe représentative D de la fonction U correspondant au prix de vente unitaire en milliers d'euros ;
- le point $A\,(a,\ C_m\,(a))$, sommet de la courbe Γ_m.

Répondre aux questions suivantes sans justifier :

1. Déterminer graphiquement $C_m(4)$.
2. Déterminer graphiquement $B_m(4)$.
   Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'entreprise.
3. Pour quelle(s) quantité(s), en tonnes, le bénéfice marginal est-il nul ?
   (*les valeurs seront données à la demi-tonne près*).
4. En déduire un encadrement de la quantité à produire, en tonnes, pour obtenir un bénéfice marginal positif.

Partie B : Aspect algébrique

Dans cette partie, le coût marginal est donné par $C_m\,(q) = 0{,}5q + (4-q)\,\mathrm{e}^{(1-0{,}25q)}$ pour q appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ et le prix de vente unitaire est donné par $U(q) = 7$ pour q appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. On admet que la fonction C_m est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.
Le tableau de variation de la fonction C_m est donné ci-dessous. On admet que le nombre réel a est compris entre 5 et 6.

q	0		a		20
$C'_m(q)$		$-$	0	$+$	
$C_m(q)$	$C_m(0)$	$\searrow$	$C_m(a)$	$\nearrow$	$Cm(20)$

1. (a) Justifier que l'équation $C_m(q) = 7$ admet une unique solution q_0 dans l'intervalle $[10\ ;\ 20]$.
   (b) À l'aide de votre calculatrice, donner un arrondi de q_0 au dixième.
   (c) Donner, en justifiant, la valeur de $B_m\,(q_0)$.
   Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de la partie A ?
2. Vérifier que la fonction C, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par :
$$C\,(q) = 10 + 0{,}25q^2 + 4q\mathrm{e}^{(1-0{,}25q)},$$
   est une primitive de la fonction C_m. Cette fonction C est la fonction coût total.
3. Déterminer le bénéfice total obtenu pour la fabrication et la vente de 15,3 tonnes de détergent.