Eléments de correction du BAC – Amérique du Nord -30 mai 2013

Exercice 1

1. A, B et C ne sont pas alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   On a $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ or $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-1}$ on sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont las alignés.

2. a. Comme A, B et C ne sont pas alignés, le plan (ABC) est bien défini.

   Δ est orthogonale au plan (ABC)si et seulement si Δ est orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   Comme le repère est orthonormé, on a $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 1\times 2 - 1\times(-1) - 1\times 3 = 0$

   $$\overrightarrow{AC}.\vec{u} = 2\times 2 - 5\times(-1) - 3\times 3 = 0$$

   Ainsi la droite Δest orthogonale au plan(ABC).

   b. Comme $\vec{u}(2;-1;3)$ est normal au plan(ABC), on a comme équation cartésienne du plan (ABC) :
   $2x - y + 3z + d = 0$

   Or A appartient au plan (ABC), on a $-4+3+d=0$

   $$d = 1$$

   Ainsi une équation cartésienne du plan(ABC)est $2x - y + 3z + 1 = 0$

   c. Comme Δ est définie par le vecteur directeur $\vec{u}$ et passe par le point D, on a comme équation paramétrique :

   $$\Delta : \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

   d. Le point H d'intersection de Δ et du plan (ABC)est défini par la valeur t telle que :

   $$2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$$

   ainsi $t = -\frac{28}{14} = -2$ ainsi $H(3;1;-2)$

3. a. P_1 et P_2 sont sécants si et seulement si un vecteur normal de P_1 n'est pas colinéaire à un vecteur normal de P_2 .

   Comme $P_1 : x + y + z = 0$, un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$

   Comme $P_2 : x + 4y + 2 = 0$, un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{n_2}(1;4;0)$

   Comme $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{1}$, les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, ainsi les plans P_1 et P_2 sont sécants (selon une droite).

b. La droite d dont la représentation paramétrique est donnée par $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$

est définie par les points $M(-2;0;2)$ (avec $t=0$) et $M(-6;1;5)$ (avec $t=1$).

Il suffit de vérifier que les points M et N appartiennent aux deux plans P_1 et P_2.

Pour M, $2+0+(-2)=0$, donc $M \in P_1$

Pour N, $(-6)+1+5=0$, donc $N \in P_1$

Pour M, $(-2)+0+2=0$, donc $M \in P_2$

Pour N, $P_2 : (-6)+4\times 1+2=0$, donc $N \in P_2$

Ainsi la droite d est bien l'intersection des plans P_1 et P_2.

c. Si le plan (ABC) et la droite d sont parallèles alors un vecteur directeur de d est colinéaire à un vecteur normal du plan (ABC) :

$\vec{v}(-4;1;3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}(2;-1;3)$ est normal au plan (ABC).

$\vec{u}.\vec{v} = 2\times(-4)+1\times(-1)+3\times 3 = 0$ ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ainsi la droite d est parallèle au plan (ABC).

<u>Exercice 2</u> (NON spécialiste mathématiques)

1. a. Lorsque $n=3$, la valeur approchée donnée par l'algorithme est 1,8340 à 10^{-4} près.

   b. Cet algorithme permet de calculer u_n .

   c. A partir de la table de valeurs de la suite (u_n) , on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 2.

2. a. Montrons que la propriété $P_n : 0 < u_n \leq 2$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : $n=0$, on a $u_0 = 1$ ainsi P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie

On suppose $0 < u_n \leq 2$

ainsi $0 < 2u_n \leq 4$

$0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4} = 2$

$0 < u_{n+1} \leq 2$, P_{n+1} vraie

Conclusion : Par le principe de récurrence, $0 < u_n \leq 2$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. $u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n}-u_n=\sqrt{2u_n}\left(1-\sqrt{\dfrac{u_n}{2}}\right)$ or $\quad 0<u_n\leq 2$

$$0<\frac{u_n}{2}\leq 1$$

$$0<\sqrt{\frac{u_n}{2}}\leq 1$$

ainsi $\quad 1-\sqrt{\dfrac{u_n}{2}}\geq 0$

donc $u_{n+1}-u_n\geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

c. Comme la suite (u_n) est croissante et est majorée par 2, (u_n) est convergente.

3. $v_n=\ln(u_n)-\ln 2$

a. $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-\ln 2=\ln\sqrt{2u_n}-\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln(2u_n)-\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln u_n-\ln 2=\dfrac{1}{2}(\ln u_n-\ln 2)=\dfrac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\ln(u_0)-\ln 2=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$.

b. $v_n=v_0q^n=-(\ln 2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=-\dfrac{\ln 2}{2^n}$

Comme $v_n=\ln(u_n)-\ln 2$, on a $\quad \ln(u_n)=v_n+\ln 2$

$$u_n=e^{v_n+\ln 2}$$

$$u_n=e^{-\frac{\ln 2}{2^n}+\ln 2}$$

c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln 2}{2^n}=0$ alors par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln 2}{2^n}+\ln 2}=e^{\ln 2}=2$

La suite (u_n) converge vers 2.

d.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u\leq 1{,}999$
	Affecter à u la valeur de $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin du tant que
Sortie :	Afficher n

Exercice 2 (spécialiste mathématiques)

Partie A

1. $c=0; a=13; b=4$

Comme $a \geq b$:

$c=1; a=9; b=4$

Comme $a \geq b$:

$c=2; a=5; b=4$

Comme $a \geq b$:

$c=3; a=1; b=4$

Comme $a \geq b$ est FAUX, on va vers la sortie

on affiche 3

on affiche 1

2. Cet algorithme permet de calculer le quotient de la division euclidienne de *a* par *b* (le nombre *c*) ainsi que le reste de cette division (le nombre *a*). Cet algorithme est un algorithme de division par soustraction successive.

Partie B

1. Codage de la lettre U :

Etape 1 : U est associé à 20

Etape 2 : on calcule le reste de la division de $9\times 20+5$ par 26, on trouve que le reste de 185 par 26 est 3. $p=3$

Etape 3 : 3 est associé à D

Ainsi U est codé par D par cet algorithme.

2.

Variables :	*m*, *b* et ~~*c*~~ sont des entiers naturels
Initialisation :	~~Affecter à *c* la valeur 0~~
	Demander la valeur de *m*
	Affecter à *m* la valeur $9m+5$
	Affecter à *b* la valeur 26
Traitement :	Tant que $m \geq b$
	~~Affecter à *c* la valeur *c*+*1*~~
	Affecter à *m* la valeur $m-b$
	Fin du tant que
Sortie :	~~Afficher *c*~~
	Afficher *m*

Partie C

1. $9x \equiv 1 \quad [26]$

   Le nombre 3 est solution de cette équation car $9 \times 3 = 27 \equiv 1 \quad [26]$

2. $9m + 5 \equiv p \quad [26]$

   $\Leftrightarrow \; 9m \equiv p - 5 \quad [26]$ or $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$ ainsi $3 \times 9m \equiv 1 \times m \equiv m \quad [26]$

   $\Rightarrow m \equiv 3(p-5) = 3p - 15 \quad [26]$

   La réciproque :

   $m \equiv 3p - 15 \quad [26] \Rightarrow 9m \equiv 9 \times 3p - 9 \times 15 \equiv 1 \times p - 135 \equiv p - 5 \quad [26]$

3. La lettre B est associé à 1 ($p = 1$), donc la lettre décodée est associée à $m \equiv 3 \times 1 - 15 \equiv -12 \equiv 14 \quad [26]$, la lettre décodé est O.

<u>Exercice 3</u>

Partie A

1. $P(390 \le X \le 410) = P(X \le 410) - P(X \le 390) = 0{,}818 - 0{,}182 = 0{,}636$ à 10^{-3} près

   (la méthode directe à la calculatrice est également correcte)

2. $p = P(X \ge 385) = 1 - P(X \le 385) = 1 - 0{,}086 = 0{,}914$
3. *<u>Méthode 1</u>* (sans l'aide du conseil donné dans l'énoncé)

   $$p = P(X \ge 385) = 1 - P(X \le 385) = 0{,}96$$

   ainsi $P(X \le 385) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$

   Soit par tâtonnement

   - avec InvN(0.04 , x ,400) en faisant varier l'écart type pour trouver 385
   - avec Ncd(-10^{E}99, 385 , x , 400) pour trouver 0,04

   Soit avec la table de valeur d'une fonction comme Y1 = InvN(0.04 , x ,400) …..

   On trouve $\sigma = 8{,}6$ à 0,1 près,

   <u>Méthode 2</u> (avec l'aide du conseil donné dans l'énoncé)

   Si Z suit la loi normale centrée réduite alors $P(Z \le -1{,}751) \approx 0{,}040$

   on veut trouver σ tel que $P(X \le 385) = 0{,}04$

   $$P(X - 400 \le -15) = 0{,}04$$

   $$P\left(\frac{X-400}{\sigma} \le \frac{-15}{\sigma}\right) = 0{,}04$$

   Or $\dfrac{X-400}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite :

$$P\left(Z \le \frac{-15}{\sigma}\right) = 0,04$$

On en déduit que $-\frac{15}{\sigma} \approx -1,751$ ainsi $\sigma = 8,6$ à 0,1 près.

Partie B

1. on a $p = \frac{96}{100}$

   Les conditions sont vérifiées : $n = 300 \ge 30$

   $$np = 300 \times \frac{96}{100} = 288 \ge 5$$

   $$n(1-p) = 300 \times \left(1 - \frac{96}{100}\right) = 12 \ge 5$$

   L'intervalle de fluctuation asymptotique est donné par la formule :

   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right],$$

   $$I = [0,938; 0,982]$$

2. $f_{obs} = \frac{283}{300} \approx 0,943$ à 10^{-3} près

   Comme $f_{obs} \in I$, on peut considérer que l'objectif est atteint.

Partie C

1. On sait que $P(T \ge 30) = 0,913$. Or T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   on a $P(T \ge 30) = 1 - P(T \le 30) = 1 - \left(1 - e^{-30\lambda}\right) = e^{-30\lambda}$

   ainsi $e^{-30\lambda} = 0,913$

   $$-30\lambda = \ln(0,913)$$

   $$\lambda = -\frac{\ln(0,913)}{30} \approx 0,003 \text{ arrondi au millième}$$

2. $P_{T \ge 60}(T \ge 90) = P(T \ge 30) = 0,913$ d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement
3. $P(T \ge 365) = e^{-365 \times 0,003} \approx 0,335$ arrondi au millième près

   Le vendeur a tort, la balance a seulement 33,5 % de chance de fonctionner correctement au moins un an.

   $$P(T \ge t) = e^{-0,003 \times t} = 0,5$$

   $$-0,003 \times t = \ln(0,5)$$

   $$t = -\frac{\ln(0,5)}{0,003} \approx 231,049 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Il y a une chance sur deux que la balance fonctionne correctement au moins 231 jours.

Exercice 4

$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\ln(x)}{x^2}=-\infty$ par quotient sur les limites car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+\end{cases}$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

   $f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ alors par produit et somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

   c. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à C_f .

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.

2. a. $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x(1-2(1+\ln x))}{x^4}=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$

   b. $-1-2\ln x>0$

   $2\ln x<-1$

   $\ln x<-0,5$

   $x<e^{-0,5}$ car le fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c.

x	0	$e^{-0,5}$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0 $\qquad$ -
Variation de f	$-\infty$ $\nearrow$	$0,5e$ $\searrow$ 0

   $f(e^{-0,5})=\frac{1+\ln(e^{-0,5})}{e^{-1}}=0,5e$

3. a. $f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}=0$

   $1+\ln x=0$

   $\ln x=-1$

   $x=e^{-1}$

Le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(e^{-1};0\right)$.

b.

x	0	e^{-1}	$e^{-0,5}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	+	0	-
Variation de f	$-\infty$	0	$0,5e$	0
Signe de $f(x)$	-	0	+	+

4. $I_n = \int_{e^{-1}}^{n} f(x)dx$ car la fonction f est positive sur $\left]e^{-1};n\right[$.

a. On a $0 \leq f(x) \leq 0,5e$ sur $\left[e^{-1};2\right]$

$$\int_{e^{-1}}^{2} 0dx \leq \int_{e^{-1}}^{2} f(x)dx \leq \int_{e^{-1}}^{2} 0,5edx$$

$$0 \leq I_2 \leq 0,5e\left(2-e^{-1}\right) = e-0,5$$

b. $I_n = \int_{e^{-1}}^{n} f(x)dx = \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{e^{-1}}^{n} = \frac{-2-\ln n}{n} - \frac{-2-\ln e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{-2-\ln n}{n} + e$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2-\ln n}{n} + e = e$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

L'aire comprise entre la courbe C_f et l'axe des abscisses pour x supérieur à $\frac{1}{e}$ est égale à e.