Corrigé du bac 2016 : Mathématiques Obligatoire Série S – Pondichéry

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

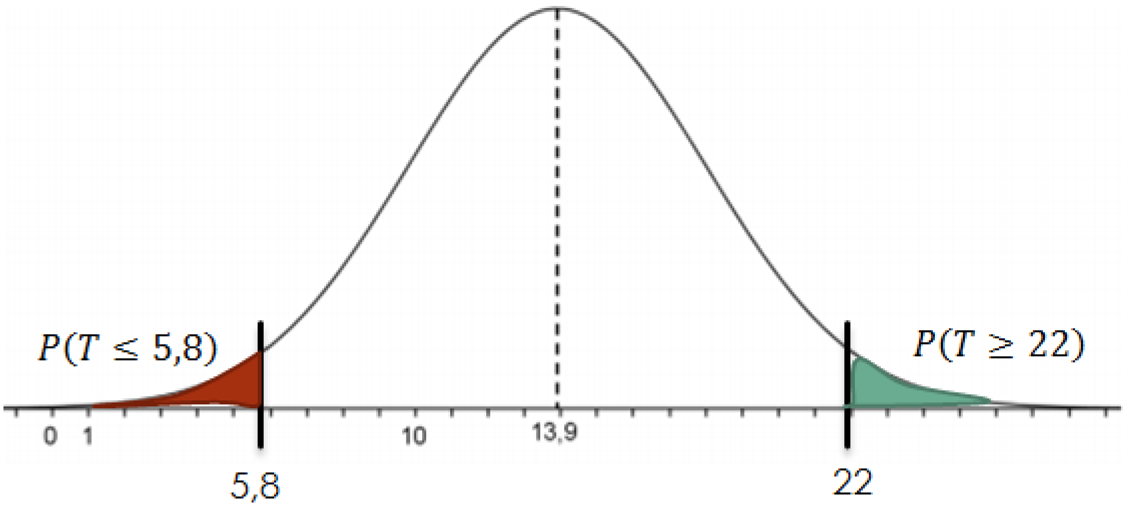
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1

Partie A

1.a)



La fonction densité de probabilité représentée ici est une gaussienne centrée en 13,9. Cette fonction est symétrique, donc si $P(T \geq 22) = 0{,}023$ alors
$P(T \leq 13{,}9 - 8{,}1) = 0{,}023 \quad \leftrightarrow \quad P(T \leq 5{,}8) = 0{,}023$

1.b) La probabilité totale d'une loi de densité vaut 1. D'où on peut écrire :

$P(5{,}8 \leq T \leq 22) + P(T \leq 5{,}8) + P(T \geq 22) = 1$

$\leftrightarrow \quad P(5{,}8 \leq T \leq 22) = -P(T \leq 5{,}8) - P(T \geq 22) + 1 = -0{,}023 - 0{,}023 + 1 = 0{,}954$

D'après la règle des 3 sigma vue en cours, pour une variable aléatoire X suivant une loi normale *N(μ,σ²)*, on a : $P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}954$, avec $\mu = 13{,}9$.

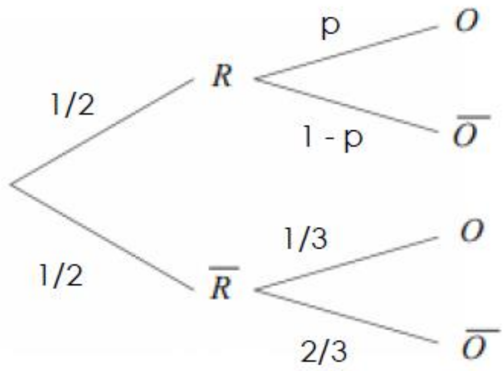
On en déduit alors que $\mu - 2\sigma = 5{,}8$ et $\mu + 2\sigma = 22$. D'où $\sigma = \frac{22-13.9}{2} = 4{,}05 \approx 4{,}1$

2) La probabilité qu'un jeune français soit connecté à internet plus de 18 heures par semaines se traduit mathématiquement par : $P(T \geq 18)$

Ce résultat peut être obtenu grâce à la calculatrice avec m = 13,9 et σ = 4,1. On trouve alors $P(T \geq 18) \approx 0{,}16$.

Partie B

1)



Il y a autant de chiffres pairs sur un dé que de chiffres impairs. La probabilité de tomber sur un chiffre pair est donc la même que celle de tomber sur un chiffre impair, soit ½.

Si le résultat du lancer est pair, le jeune doit répondre sincèrement. S'il répond oui, la probabilité correspondante est égale à la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois le téléchargement illégal. S'il répond non, la probabilité vaut $\bar{p}$.

Si le résultat du lancer est pair, et si le jeune tombe sur 1, il doit répondre oui, ce qui correspond à une probabilité de 1/3. S'il tombe sur 3 ou 5, il doit répondre non, ce qui correspond à une probabilité de 2/3.

Calculons la probabilité q : « le jeune a répondu oui » en utilisant la loi des probabilités totales et en s'aidant de l'arbre pondéré :

$$P(O) = P(R \cap O) + P(\bar{R} \cap O) = P(R) \times P_R(O) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(O)$$

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2}p + \frac{1}{6}}$$

2.a) On définit l'intervalle de confiance au niveau de confiance à 95% tel que :

$$I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

Avec n la taille de l'échantillon et f la fréquence de « oui ». Ici, n = 1500 et f = 625/1500, donc

$$\boldsymbol{I} = \left[\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} ; \frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] = [\boldsymbol{0,390} ; \boldsymbol{0,443}].$$

2.b) Grâce à l'intervalle de confiance, on peut encadrer la probabilité q : « le jeune a répondu oui » tel que :

$$0,390 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0,443$$

D'où :

$2{,}34 \leq 3p + 1 \leq 2{,}66$

Puis :
$1{,}34 \ \leq 3p \leq 1{,}66$

Enfin :
$\boldsymbol{0,45 \ \leq p \leq 0,55}$

On en déduit que la proportion de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal est compris entre 45% et 55%.

Exercice 2

1) On calcule le module de la différence entre les affixes de B et de J (donc la distance entre les affixes B et J) :

$$\boldsymbol{BJ} = |\boldsymbol{Z_J} - \boldsymbol{Z_B}| = \left|\frac{i}{2} - (-i)\right| = \left|\frac{i}{2} + i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$JK = \frac{1}{2}$ or K appartient au segment [BJ], donc on en déduit :

$$\boldsymbol{BK} = BJ - JK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

2.a) Le point A_2 appartient au cercle trigonométrique donc a pour module 1. Son argument vaut $\frac{2\pi}{5} \times 2$. L'expression exponentielle de son affixe vaut alors :

$$\boldsymbol{z_{A_2} = e^{i\frac{4\pi}{5}}}$$

2.b) $BA_2^2 = |z_{A_2} - z_B|^2 = \left|e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1\right|^2 = \left|\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right|^2$

$$BA_2^2 = \sqrt{(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1)^2 + sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2}^{\,2} = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2$$

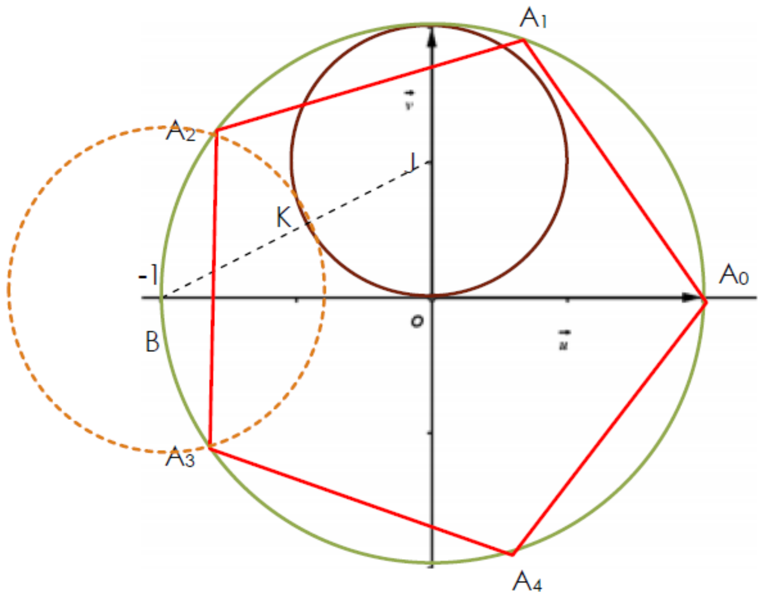
Or $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ donc on a :

$$\boldsymbol{BA_2^2 = 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2}$$

2.c) D'après les résultats obtenus grâce au logiciel de calcul formel, on sait que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1)$, d'où

$$\boldsymbol{BA_2} = 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 = 2 \times \frac{1}{4}(-\sqrt{5}-1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1) = \boldsymbol{BK}$$

3)

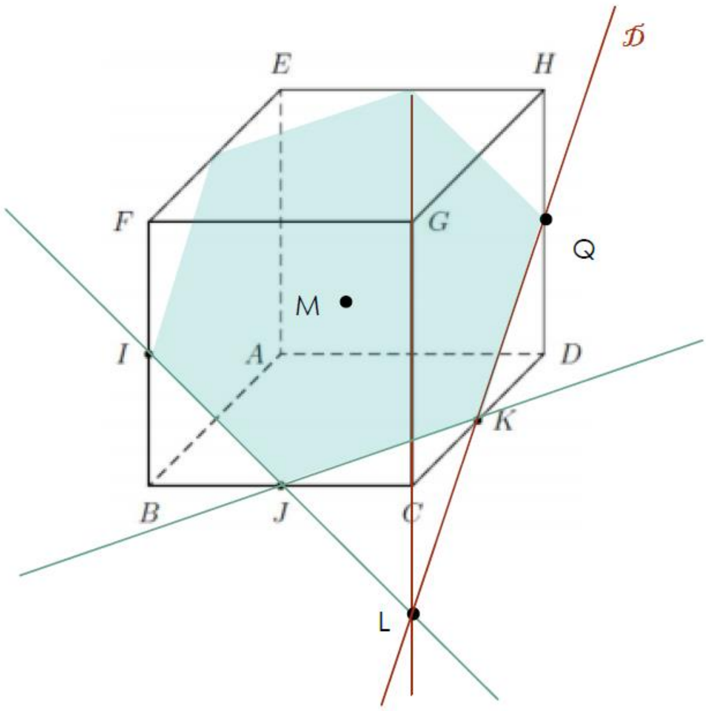


Pour tracer un pentagone régulier, il faut suivre le cheminement emprunté lors de la résolution des questions.

- On place les points B et J d'affixes -1 et i/2.
- On trace ensuite le cercle C de rayon ½ et de centre J (il coupe le segment BJ en K !).
- On trace le cercle trigonométrique (on sait que les points A_k se trouvent dessus). Nous avons trouvé à la question 2)c) que $\boldsymbol{BA_2} = \boldsymbol{BK}$; on reporte le point A_2 sur le cercle trigonométrique selon l'égalité démontrée, et on en déduit A_3.
- De A_2 et A_3, on en déduit les autres points A_0, A_1, A_2 et A_5.

Exercice 3

Partie A



Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. A est donc le centre.

1) Les coordonnées des points A, G, I, J, K sont :

A(0, 0, 0), G(1, 1, 1), I(1, 0, ½), J(1, ½, 0), K(½, 1, 0)

2.a) Montrons que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) :

Calculons le vecteur $\overrightarrow{AG}$: $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Puis le vecteur $\overrightarrow{IJ}$: $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-1\\\frac{1}{2}-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Et le vecteur $\overrightarrow{IK}$: $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\1-0\\0-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Nous devons vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux avec $\overrightarrow{AG}$ en faisant leur produit scalaire :

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}.\overrightarrow{\mathrm{AG}} = 0 * 1 + \frac{1}{2} * 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) * 1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}.\overrightarrow{\mathrm{AG}} = -\frac{1}{2} * 1 + 1 * 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) * 1 = -1 + 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est bien normal au plan (IJK).

2.b) D'après la question précédente, on sait que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK). Le plan (IJK) comprend donc tous les points M(x, y, z) tels que $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ soient orthogonaux.

$$\overrightarrow{\mathrm{IM}}.\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x - 1 + y + z - \frac{1}{2} = x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

L'équation du plan (IJK) est donc $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

3.a) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

Nous connaissons $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, ainsi $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$.

Sachant que A(0, 0, 0), on en déduit la position de M : M(t, t, t).

Calculons ensuite le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$: $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\begin{pmatrix} 1-t \\ 0-t \\ \frac{1}{2}-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ \frac{1}{2}-t \end{pmatrix}$

Ce qui nous donne : $\mathrm{MI}^2 = (1-\mathrm{t})^2 + (-\mathrm{t})^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2$

$$\mathbf{MI^2 = 3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} \mathbf{- 3}\boldsymbol{t} + \mathbf{\frac{5}{4}}$$

3.b) Pour connaître les coordonnées du point M pour lequel la distance MI² déterminée précédemment est minimale, il faut résoudre son équation.

$\mathrm{MI}^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$; le coefficient a = 3 du polynôme du second degré étant positif, il s'agit alors d'une parabole tournée vers le bas (fonction décroissante, puis croissante qui admet donc un minimum).
La distance MI² admet bien un minimum. Quel est-il ?

L'abscisse du sommet d'un polynôme du second degré $\mathrm{P} = \mathrm{at}^2 + \mathrm{bt} + \mathrm{c}$ se calcule grâce à la formule $\mathrm{t} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$. On a donc $t = \frac{3}{2*3} = \frac{1}{2}$.

Ce qui nous donne enfin le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4.a) On a montré à la question 2.b) que l'équation du plan (IJK) était $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

Si M appartient au plan, il doit vérifier l'équation du plan. En remplaçant les coordonnées de M dans l'équation, on obtient :

$$x + y + z - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Le point M appartient bien au plan (IJK).

4.b) Calculons le vecteur $\overrightarrow{IM}$:

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions l'orthogonalité des droites $\overrightarrow{IM}\ et\ \overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}*1+\frac{1}{2}*1 = 0$$

Calculons le vecteur $\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions maintenant l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{IM}\ et\ \overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BF}\ et\ \overrightarrow{AG}$.

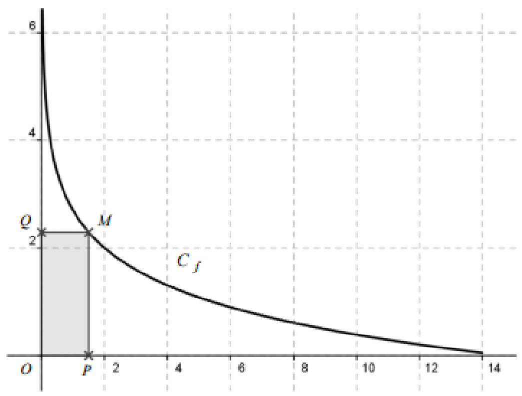
De plus, M appartient à la droite (AG) ; en effet, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ (cf. figure) donc les droites (AG) et (IM) sont sécantes en M.

De plus, I étant le milieu de [BF], les droites (IM) et (BF) sont elles aussi sécantes.

La droite (IM) est donc perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

Exercice 4

La courbe représentative C_f de la fonction *f* est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à C_f, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

Quelle est l'aire du rectangle grisé ? Si l'abscisse P du point M vaut *x*, son ordonnée Q vaut *f(x)*. L'équation de la fonction *f* étant $y = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$, on a l'aire du rectangle égale à $A(x) = f(x) * x = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

L'aire du rectangle varie donc en fonction de la position du point M sur C_f.

Pour savoir si l'aire du rectangle peut être maximale, il faut étudier les variations de l'équation donnée par *A(x)*.

$$A'(x) = 2 - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + x\frac{1}{x}\right] = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad 1 > \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \rightarrow \quad e > \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x < 2e$$

La dérivée A'(x) est positive pour $x < 2e$.

x	0		2e		14
A'(x)	‖	+	0	-	
A(x)	‖	↗	2e	↘	

L'aire du rectangle est donc maximale pour x = 2e et $y = A(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 1$

Exercice 5

Partie A : Modélisation discrète

1) En étudiant l'algorithme, on peut en déduire la relation de récurrence de la suite (T_n). En effet, le premier terme nous est donné par l'initialisation T = 25, et la relation de récurrence est définie par l'équation : T_{n+1} = 0,85*T + 15.

On a donc : (T_n): $\begin{cases} T_0 = 25 \\ T_{n+1} = 0{,}85 * T + 15 \end{cases}$

La température T_3 correspond à la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.

$$T_0 = 25$$
$$T_1 = 0{,}85 * 25 + 15 = 36{,}3$$
$$T_2 = 0{,}85 * 36{,}3 + 15 = 45{,}81$$
$$T_3 = 0{,}85 * 45{,}81 + 15 = 53{,}94$$

En arrondissant à l'unité, on trouve une température au bout de 3 minutes de 54°C.

2) Nous allons démontrer la propriété (P_n): $T_n = 100 - 75 * 0{,}85^n$ par récurrence.

Initialisation : La propriété est-elle vraie au rang n = 0 ?

$$(P_0): \ T_0 = 100 - 75 * 0{,}85^0 = 100 - 75 = 25$$

La propriété (P_n) est donc vraie au rang n = 0.

Hérédité : Supposons, pour n fixé, la propriété vraie au rang n, est-elle vraie au rang n + 1 ?

On sait que $T_{n+1} = 0{,}85 * T_n + 15$. Ainsi, en appliquant la propriété (P_n) :

$$T_{n+1} = 0{,}85 * T_n + 15 = 0{,}85 * (100 - 75 * 0{,}85^n) + 15 = 85 - 75 * 0{,}85^{n+1} + 15$$

$$T_{n+1} = 100 - 75 * 0{,}85^{n+1}$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie quel que soit n.

On a donc démontré que (P_0) et (P_{n+1}) sont vraies quel que soit n : la propriété (P_n) est donc vraie et ce quel que soit n.

3) La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C. On va donc résoudre l'inéquation $T_n > 85$.

$$T_n = 100 - 75 * 0{,}85^n > 85 \ \Rightarrow \ 25 - 75 * 0{,}85^n > 0$$

$$\Rightarrow \ 15 > 75 * 0{,}85^n \ \Rightarrow \ 0{,}85^n < \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \ \ln(0{,}85^n) < \ln\left(\frac{1}{5}\right) \ \Rightarrow \ \mathrm{n} * \ln(0{,}85) < -\ln(5) \ \Rightarrow \ n > -\frac{\ln(5)}{\ln(0{,}85)} \approx 9{,}9$$

En arrondissant à l'unité, la stérilisation débute au bout de **10 minutes**.

Partie B : Modélisation continue

1.a) Etudions le sens de variations de $f(t) = 100 - 75.e^{\frac{-ln5}{10}t}$

La fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables. (fonctions constante $f_1(t) = 100$ et $f_2(t) = 75.e^{\frac{-ln5}{10}t}$)

Dérivons cette fonction :

$$f'(t) = \left(100 - 75.e^{\frac{-ln5}{10}t}\right)' = 75 * \frac{ln5}{10} e^{\frac{-ln5}{10}t} = 7{,}5 * \ln(5) * e^{\frac{-ln5}{10}t}$$

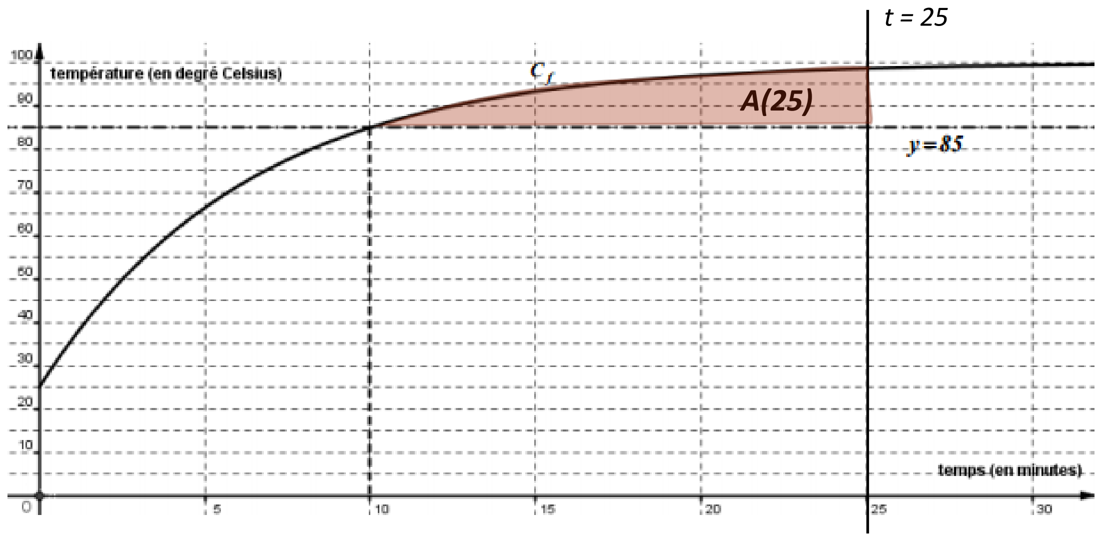
t	0	+ ∞
f'(t)	+	
f(t)	↗	

En effet, la fonction exponentielle est toujours positive sur R : la fonction f est donc croissante sur R.

1.b) Nous avons montré à la question précédente que la fonction f était croissante. Si $t \geq 10$, alors $f(t) \geq f(10) = 100 - 75.e^{\frac{-ln5}{10}*10} = 85$.

$$Si\ t \geq 10, \qquad \boldsymbol{f(t) \geq 85}$$

3.a)



Pour estimer l'aire A(25) coloriée sur le graphique ci-dessus, il faut compter de manière approximative le nombre de rectangles. En effet, on veut seulement montrer que cette aire est supérieure à 80, il n'est donc pas nécessaire d'effectuer un calcul rigoureux.

Ainsi, on compte au moins 4 rectangles compris dans cette aire. Un rectangle a une aire de 5*5 = 25 unité d'aire, ce qui nous fait un total pour l'aire d'au moins 4 * 25 = 100. On trouve bien que **A(25) > 80**.

3.b) Pour θ≥ 10, l'aire A(θ) est délimitée par la droite y = 85. On doit alors calculer l'aire sous la courbe de f en faisant attention a retrancher 85 pour le pas calculer toute l'aire sous la courbe ! $A(\theta)$ se calcule donc tel que :

$$\mathrm{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)dt = \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75.e^{\frac{-ln5}{10}t} - 85\right) dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75.e^{\frac{-ln5}{10}t}\right) dt$$

$$\mathrm{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} 15dt - 75 * \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-ln5}{10}t} dt = 15(\theta - 10) - 75 * \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-ln5}{10}t} dt$$

3.c) La stérilisation n'est finie au bout de 20 minutes que si A(20)>80.

$$\mathrm{A}(20) = 15(20 - 10) - 75 * \int_{10}^{20} e^{\frac{-ln5}{10}t} dt = 150 - 75 \left[-\frac{10}{ln5} e^{\frac{-ln5}{10}t}\right]_{10}^{20}$$

$$= 150 + \frac{750}{ln5} * \left[\left(e^{-ln5}\right)^2 - e^{-ln5}\right] = 150 + \frac{750}{ln5} * \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 - \frac{120}{ln5} \approx 75{,}4$$

On trouve $\mathrm{A}(20) < 80$ ce qui veut dire que la stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.