

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages
numérotées de 1/8 à 8/8 .**

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

- (a) 1,74 (b) $\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$ (c) $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$ (d) 0,6

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x e^{x^2}$.

La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^2 f(x) dx$ est :

- (a) $4e^4 - 4e^{-4}$ (b) $4(e^4 + e^{-4})$ (c) 0 (d) 1

3. f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 3) \ln x$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a :

- (a) $f'(x) = \frac{2x+3}{x}$ (b) $f'(x) = \frac{2}{x}$
(c) $f'(x) = 2 \ln x + \frac{3}{x} + 2$ (d) $f'(x) = 2 \ln x + \frac{3}{x}$

4. Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.

Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

- (a) 12 % (b) 35 % (c) 0,35 % (d) 12,35 %

EXERCICE 2 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publié par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen cette année là était seulement de 56,6 %.

On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.

On considère les évènements suivants :

- A : « le candidat a suivi la filière AAC » ;
- R : « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus \bar{E} désigne l'évènement contraire de E .

- Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\bar{A}}(R)$.
 - Traduire la situation par un arbre pondéré.
- Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.
 - Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
- Justifier que $P(R) = 0,6028$.
- Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

Partie B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école ?
Justifier votre réponse.

Partie C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1 500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

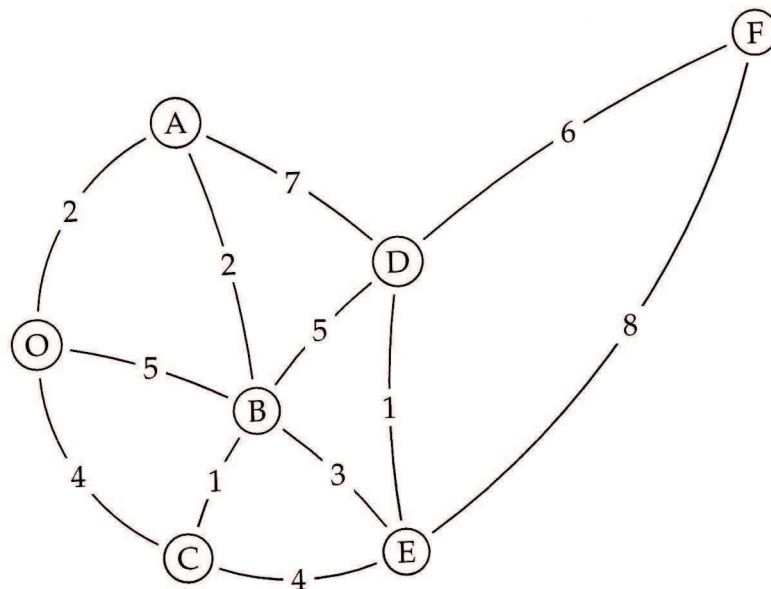
1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.
2. Déterminer $P(X \leq 1155)$.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
3. a) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a , arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geq a) = 0,2$.
b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x -ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a , b et c .
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

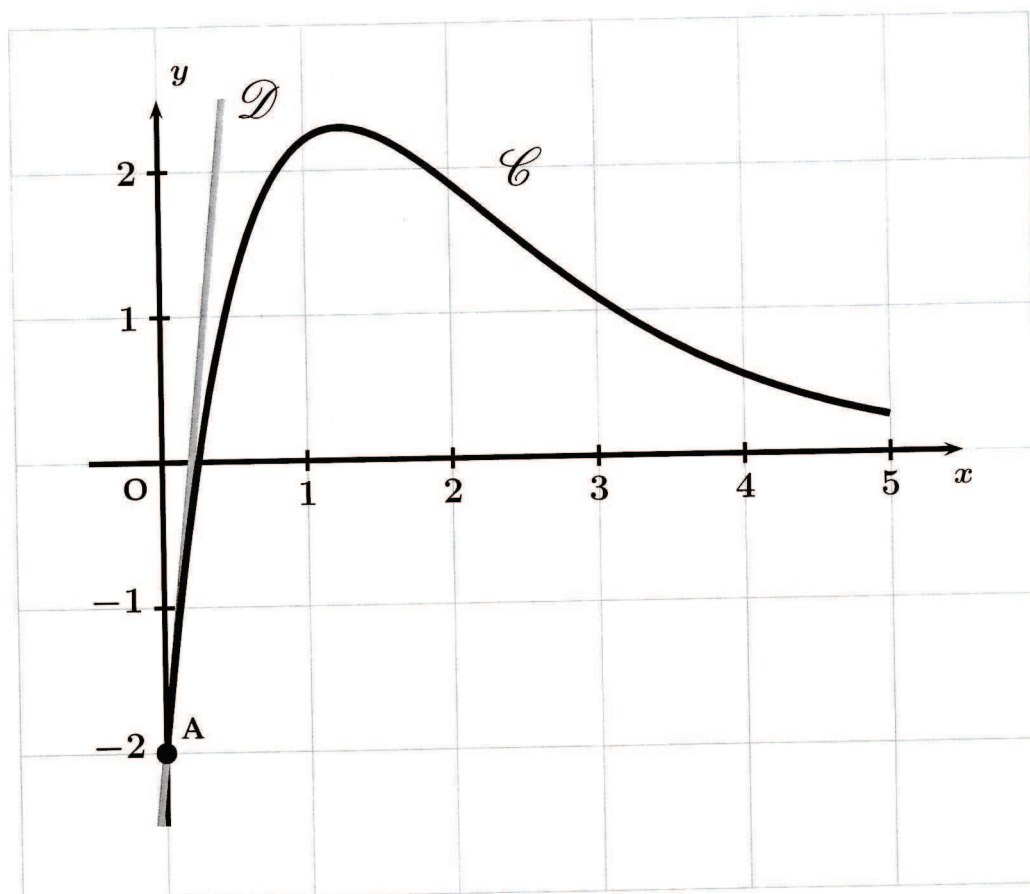
- a) Calculer $M \times A$.
 - b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?
4. À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer les valeurs des nombres a , b et c .
 5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.
Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours?
Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O .



Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} passent toutes les deux par le point $A(0; -2)$.

La droite \mathcal{D} est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)e^{-x}$$

b) Dédire des questions précédentes que $a = 8$.

c) Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x .

3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$. On pourra faire un tableau.
 b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
 c) Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10) e^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

- a) Donner l'expression de f'' , fonction dérivée seconde de la fonction f .
 b) Justifier que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[1;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)e^{-x}$$

- a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
 b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
 On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.