Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Liban

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBF) s'il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Calcul du vecteur $\overrightarrow{DF}$:

$D\ (0; 0; 0)$ et $F(1; 1; 1)$

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \\ z_F - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de 2 vecteurs non colinéaires du plan (EBG) :

$E(1; 0; 1)$, $B(1; 1; 0)$ et $G(0; 1; 1)$

$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalité entre $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BF}$:

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$, par conséquent $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$, par conséquent $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{EG}$

Sachant que $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{EB}$ et au vecteur $\overrightarrow{EG}$, on peut donc dire que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Pour calculer une des équations cartésiennes du plan (EBG), on suppose :

$M(x; y; z) \in (EBG)$

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 0 \end{pmatrix}$

D'après la question 1 nous avons démontré que $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (EBG). C'est pourquoi on obtient : (EBG): $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DF} = 0$

$$(EBG): (x - 1) + (y - 1) + (z - 0) = 0$$
$$(EBG): x - 1 + y - 1 + z = 0$$
$$(EBG): x + y + z - 2 = 0$$

<u>Rappel :</u> il existe une infinité d'équation cartésienne pour chaque plan.

3. On cherche une équation de la droite (DF), $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur, on suppose $\overrightarrow{DM}$ colinéaire à $\overrightarrow{DF}$.

$D(0; 0; 0)$, $\overrightarrow{DF}(1; 1; 1)$, $M(x; y; z)$

$$(DF) = \overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la représentation paramétrique de (DF) on obtient :

$$(DF): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Par conséquent l'intersection entre (DF) et le plan (EBG) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$3t = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Alors on obtient le point d'intersection I entre la droite (DF) et le plan (EBG), tel que $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Partie B

1. Si M est confondu avec D, alors l'angle $\widehat{EMB}$ appartient au triangle équilatérale EMB car chaque côté de ce triangle est égal, puisque ce sont des diagonales de différentes faces du cube. Sachant que la somme des angles d'un triangle équivaut à π, alors la mesure θ en radian est $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{3}$

Si M est confondu avec F, alors l'angle $\widehat{EMB}$ appartient au triangle EMB isocèle et rectangle en F . Par conséquent $\widehat{EMB}$ est un angle droit, alors la mesure en radian θ est $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{2}$. De plus, puisque la somme des angles d'un triangle équivaut à π, alors les autres angles $\widehat{BEM} = \widehat{EBM} = \frac{\pi}{4}$

2.a) D'après l'énoncé $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$, de plus on a :

$$\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix} \text{ et } x\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} x \times 1 \\ x \times 1 \\ x \times 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases}$$

On obtient les coordonnées de M suivantes $M(x; x; x)$.

2.b) Calcul des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$:

$M(x; x; x)$, $E(1; 0; 1)$ et $B(1; 1; 0)$

$$\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ -x \\ 1 - x \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ 1 - x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} &= (1 - x)(1 - x) + 2(1 - x)(-x) \\ &= 1^2 - 2x + x^2 - 2x + 2x^2 \\ &= (1 - x)^2 - 2x(1 - x) \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \qquad \text{car } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} ME = MB = \|\overrightarrow{MB}\| &= \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 + (z_B - z_M)^2} \\ &= \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2 + (-x)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 2(1-x)^2} \end{aligned}$$

Ajoutons que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} &= ME \times MB \times \cos(\widehat{EMB}) = ME^2 \times \cos(\theta) \\ &= [x^2 + 2(1-x)^2] \times \cos(\theta) \\ &= (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta) \end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = 3x^2 - 4x + 1 \\ \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$3x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

3.a) Le triangle MEB est un triangle rectangle, si et seulement si $\cos(\theta) = 0$
D'après le tableau de variation, on voit que f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$, de plus $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une seule valeur α sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ pour laquelle $f(\alpha) = 0$. Toujours grâce au tableau de variation, on observe que $f(\alpha) = 0$ lorsque $\alpha = \frac{1}{3}$
De même, on voit $f(1) = 0$, alors il existe une autre valeur α pour laquelle $f(\alpha) = 0$, $\alpha = 1$
Alors $\cos(\theta) = 0$, autrement dit le triangle MEB est rectangle si $\alpha = \frac{1}{3}$ ou $\alpha = 1$

3.b) La fonction cosinus étant une fonction décroissante sur $[0; \pi]$, pour que l'angle θ soit maximal, il faut que $\cos\theta$ soit minimal.
Grâce au tableau de variation on voit que le minimum de $f(x)$ se situe en $x = \frac{2}{3}$, par conséquent pour que l'angle soit maximal il faut que le point M soit confondu avec le point $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A – Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

1. Pour calculer une moyenne à partir d'intervalle, il suffit d'utiliser la valeur centrale de cet intervalle :

$$\overline{m} = \frac{1 \times 75 + 3 \times 19 + 5 \times 10 + 7 \times 5}{75 + 19 + 10 + 5} \approx 1{,}99$$

Le temps d'attente moyen à l'entrée du parking est de 2 minutes environ.

2.a) On sait que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Si on choisit $\lambda = 0{,}5$ on obtient $E(T) = \frac{1}{0{,}5} = 2$
Ce résultat est bien cohérent avec la moyenne estimée à la question 1.

2.b) On cherche $P(T < 2)$

$$P(T < 2) = P(0 \leq T < 2)$$

$$e^{-0{,}5\times 0} - e^{-0{,}5\times 2} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321$$

La probabilité que la voiture mette moins de 2 minutes pour franchir les barrières du parking est de 63,21%.

2.c) On cherche $P_{T\geq 1}(T \leq 2)$, d'après la loi de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{T\geq 1}(T \leq 2) = P_{T\geq 1}(T \leq 1 + 1) = P(T \leq 1) =$$

$$1 - e^{-0{,}5\times 1} \approx 0{,}3935$$

La probabilité que la voiture mette moins de 2 minutes à franchir les barrières alors qu'elle attend déjà depuis 1 minute est de 39,35%.

<u>Partie B – Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain</u>

1.a) Comme l'indique l'espérance de la loi normale (μ), la durée moyenne de stationnement est de 70 minutes.

1.b) On cherche $P(D > 120) = 0{,}5 - P(70 < D < 120)$ car $\mu = 70$
Grâce à la calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(70\ ,\ 120\ ,\ 30\ ,\ 70)$
$P(D > 120) = 0{,}5 - P(70 < D < 120) \approx 0{,}0478$
La probabilité que le stationnement dépasse 2 heures est de 47,8%.

1.c) On cherche t tel que $P(D \leq t) = 0{,}99$:
Grâce à la calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → InvN → $InvN(0{,}99\ ,\ 30\ ,\ 70)$
$P(D \leq 140) = 0{,}99$
Le temps maximum pour au moins 99% des voitures est de 140 minutes, soit 2 heures et 20 minutes.

2.

Durée	**< 15 minutes**	**Entre 15 minutes et 1 heure**	**+ 1 heure**	**+ 1 heure**
Tarif	Gratuit	3,5	t	t
Probabilité	$P(D < 15) \approx 0{,}0334$	$P(15 < D < 60) \approx 0{,}3361$	$P(60 < D < 120) \approx 0{,}5828$	$P(120 < D < 180) \approx 0{,}0477$
Coût	0	3,5	$3{,}5 + t$	$3{,}5 + 2t$

$P(D < 15) = 0{,}5 - P(15 < D < 70) \approx 0{,}0334$

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(15\ ,\ 70\ ,\ 30\ ,\ 70)$

Même utilisation de la calculatrice pour les autres cases de la ligne « probabilité »

Pour trouver t on s'appuie sur l'espérance de la variable D qui est de 5 :

$$E(D) = 5 = 0{,}3361 \times 3{,}5 + 0{,}5828 \times (3{,}5 + t) + 0{,}0477 \times (3{,}5 + 2t)$$

$$1{,}17635 + 2{,}0398 + 0{,}5828t + 0{,}1668 + 0{,}0953t = 5$$

$$t \times (0{,}5828 + 0{,}0953) = 5 - 1{,}17635 - 2{,}0398$$

$$t = \frac{1{,}61705}{0{,}6781} \approx 2{,}3841$$

Pour que le prix moyen soit de 5€, il faut alors que le prix d'une heure supplémentaire soit de $t = 2{,}38$€

Partie C – Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

On sait que $T' \sim N(30; \sigma'^2)$, nous allons centrer réduire T' pour obtenir la variable aléatoire Z :

$$Z = \frac{T' - 30}{\sigma'}$$

$$Z \sim N(0; 1)$$

On sait que $P(T' \leq 37) = 0{,}75$

$$P\left(\frac{T' - 30}{\sigma'} \leq \frac{37\_30}{\sigma'}\right) = 0{,}75$$

$$P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma'}\right) = 0{,}75$$

Puisque Z suit la loi normale centrée réduite, on utilise la calculatrice :
STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ 75\ ,\ 1\ ,\ 0)$

$$\frac{7}{\sigma'} \approx 0{,}674490 \quad \text{donc} \quad \sigma' \approx 10{,}3782$$

Par conséquent $T' \sim N(30; 10{,}3782^2)$

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(10\ ,\ 50\ ,\ 10{,}3782\ ,\ 30)$

$$P(10 < T' < 50) \approx 0{,}9460$$

L'objectif du gestionnaire de 95% n'est pas atteint, seulement 94,6% des voitures restent stationner entre 10 et 50 minutes.

EXERCICE 3 (3 points)

Etude du signe et de la variation de f_k :

$$f'_k(x) = 1 - ke^{-x} = 0$$
$$ke^{-x} = 1$$
$$e^{-x} = \frac{1}{k}$$
$$-x = \ln\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln(k)$$
$$x = \ln(k)$$
$$f(\ln(k)) = \ln k + k \times \frac{1}{e^{\ln k}} = \ln k + 1$$

x	$-\infty$	$x = \ln(k)$	$+\infty$
Signe de $f'_k(x)$	$-$	0	$+$
Variation de $f_k(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln k + 1$	↗ $+\infty$

La fonction f_k admet un minimum, qui se situe au point noté A_k, alors on a $A_k(\ln k\,; 1 + \ln k)$. De ces coordonnées nous pouvons déduire que $y = 1 + x$, ce qui signifie que les points sont bien alignés.

EXERCICE 4 (5 points)

<u>Partie A – Modélisation de l'âge d'un épicéa</u>

1. Pour étudier les variations d'une fonction, il faut commencer par calculer sa dérivée, pour cela nous allons utiliser $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$ et $(ku)' = k \times u'$

On pose $f(x) = 30 \times u(x)$, avec $u = \frac{20x}{1-x}$

$$u' = \frac{20(1-x) - 20x \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}$$

$$\ln(u)' = \frac{\frac{20}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}} = \frac{20}{(1-x)^2} \times \frac{(1-x)}{20x} = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$f'(x) = 30 \times \frac{1}{x(1-x)} = \frac{30}{x(1-x)}$$

Si $x \in]0; 1[$ alors $x(1-x) > 0$, donc $f'(x) > 0$. On sait que lorsque la dérivée est positive cela signifie que la fonction est croissante, $f(x)$ est donc croissante lorsque $x \in]0; 1[$.

x	0		1
Variation de $f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\Vert$

<u>Remarque :</u> 0 et 1 sont des valeurs interdites, car il est impossible de diviser par 0.

2. On appelle x_1 et x_2, les valeurs comprises entre 0 et 1, tel que : $f(x_1) = 20$ et $f(x_2) = 120$

$f(x_1) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 20$

$\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{20}{30}$

$\frac{20x}{1-x} = e^{\frac{2}{3}}$

$(1-x)e^{\frac{2}{3}} = 20x$

$e^{\frac{2}{3}} - xe^{\frac{2}{3}} = 20x$

$e^{\frac{2}{3}} = xe^{\frac{2}{3}} + 20x$

$e^{\frac{2}{3}} = x\left(e^{\frac{2}{3}} + 20\right)$

$x_1 = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}+20} \approx 0{,}0887$

$f(x_2) = 120 \leftrightarrow 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = 120$

$\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{120}{30}$

$\frac{20x}{1-x} = e^4$

$(1-x)e^4 = 20x$

$e^4 - xe^4 = 20x$

$e^4 = xe^4 + 20x$

$e^4 = x(e^4 + 20)$

$x_2 = \frac{e^4}{e^4+20} \approx 0{,}7319$

Pour que le modèle reste conforme à ses conditions de validités entre 20 et 120 ans, il faut $x \in [0{,}0887; 07319]$, autrement dit le diamètre de l'arbre doit être compris approximativement entre 9 et 73 centimètres.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{20x}{1-x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = -\infty$ car $\lim \ln(0^+) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{20x}{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to \infty^+} 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = +\infty$

x	0		0,0887		0,7319		1
Variation de $f(x)$	-∞	↗	20	↗	120	↗	+∞

Partie B

1.a) La cellule D23 nous informe que la vitesse de croissance d'un épicéa entre 70 et 80 ans est de 0,245 mètres ou 24,5 centimètres.

1.b) Pour remplir le tableau correctement il suffit d'écrire la formule $=(C2-B2)/(C1-B1)$ dans le cellule C3, elle pourra être recopiées dans les cellules vers la droite.

2. Grâce à la partie A, on connait la relation entre l'âge et le diamètre du tronc. Avec un diamètre de 27 cm, l'âge de l'épicéa est de $f(0{,}27) = 60{,}03$

Grâce au classeur Excel on sait que la vitesse de croissance en mètre par années est de 0,22 entre 50 et 70 ans, on peut donc calculer : $11{,}2 + 10 \times 0{,}22 = 13{,}4$.

Un épicéa de 27 cm de diamètre (et donc de 60 ans) mesure approximativement 13,4 mètres de haut.

3. a) D'après la formule de 1.b) on complète le tableau de données

Années (année)	**50**	**70**	**80**	**85**	**90**	**95**	**100**	**105**	**110**	**120**	**130**	**150**
Hauteur (mètre)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
Vitesse de croissance (m/an)	n/a	0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,295	0,168

La vitesse de croissance en mètre par an est maximale quand l'épicéa entre 80 et 95 ans. Cela nous donne l'intervalle d'âges sur lequel la qualité du bois est meilleure.

3.b) $f(0{,}7) = 30\ln\left(\frac{20\times 0{,}7}{1-0{,}7}\right) \approx 115$ or $115 \notin [80; 95]$.

La vitesse de croissance maximale est dépassée.

Il y a 2 conclusions possibles et opposées selon les objectifs des bucherons (qui ne sont pas précisés dans le sujet) :
- Ne pas couper les arbres, car la qualité du bois ne sera pas la meilleure possible.
- Couper les arbres malgré tout, car si on attend davantage, la qualité du bois sera encore moins bonne.