Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A – Durée d’attente

1) D1, variable aléatoire modélisant la durée d'attente d'un client Internet suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,6$.

a) La durée d'attente moyenne correspond à l'espérance de la variable D1.
Pour une loi exponentielle :
E(D1) = 1/ λ
E(D1) = 1/0,6 = 1,667 minutes = 1 minute et 40 secondes

b) $P(D1 \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-5 \times 0,6} = 0,95$
La probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes est donc égale à 0,95.

2) D2, variable aléatoire modélisant la durée d'attente d'un client mobile, suit la loi exponentielle de paramètre λ, un réel strictement positif.

a) $P(D2 \leq 4) = 0,798$
et $P(D2 \leq 4) = 1 - e^{-4\lambda}$
d'où $1 - e^{-4\lambda} = 0,798$
<=> $e^{-4\lambda} = -(0,798 - 1)$
<=> $-4\lambda = \ln(0,202)$
<=> $\lambda = -\ln(0,202)/4 \simeq 0,4$

b) $\lambda=0,4$

On cherche à savoir si P(D2 $\geq$5) < 10 %:

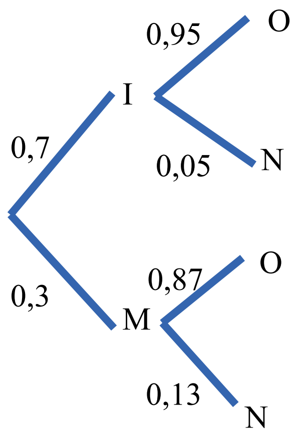
$P(D2 \geq 5) = e^{-0,4 \times 5} = 0,135 > 0,1$
On ne peut donc pas considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur.

Partie B – Obtention d’un opérateur

On note les événements suivants :

O : " Obtenir un opérateur "
N : " Ne pas obtenir d'opérateur"
I : " L'appel provient d'un client internet "
M : " L'appel provient d'un client mobile "

On modélise la situation par l'arbre de probabilités suivant :



1) $P(O) = P(I \cap O) + P(M \cap O)$ d'après la formule des probabilités conditionnelles
$= (0,7 \times 0,95) + (0,3 \times 0,87)$
$= 0,926$

Donc la probabilité qu'un client joigne un opérateur est de 0,926.

2) On cherche à savoir si la probabilité de I " l'appel provient d'un client internet" sachant N "ne pas obtenir d'opérateur" est inférieure ou supérieure à la probabilité de M " l'appel provient d'un client mobile" sachant N "ne pas obtenir d'opérateur".

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$P_N(I) = P(I \cap N) / P(N)$
Or $P(I \cap N) = P(I) \times P_I(N)$
Donc finalement :
$P_N(I) = P(I) \times P_I(N) / P(N)$
$P_N(I) = (0,7 \times 0,05) / (1-0,926) = 0,473$

et
$P_N(M) = P(M \cap N) / P(N)$
Or $p(M \cap N) = P(M) \times P_M(N)$
Donc finalement :
$P_N(M) = P(M) \times P_M(N) / P(N)$
$P_N(M) = (0,3 \times 0,13) / (1-0,926) = 0,527$

Donc $P_N(M) > P_N(I)$, il est donc plus probable que le client soit un client mobile.

Partie C – Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur. On a donc une probabilité de satisfaction : $p = 0,85$
Pour savoir si cette probabilité est juste, une enquête est faite sur un échantillon de $n=1303$ clients, 1150 d'entre eux se disent satisfaits. La fréquence expérimentale de satisfaction est alors :
$f = 1150/1303 = 0,883$

Au seuil de 95 %, l'intervalle de confiance est le suivant :

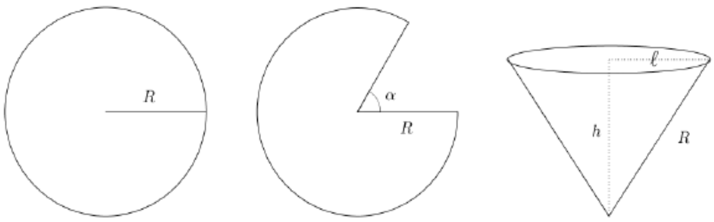
$$I = [\quad p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\quad]$$

$$I = [\quad 0{,}85 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85(1-0{,}85)}}{\sqrt{1303}}\ ;\ 0{,}85 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}85(1-0{,}85)}}{\sqrt{1303}}\quad]$$

I = [0,830 ; 0,869]

On remarque que f = 0,883 n'appartient pas à I.
En conclusion, le taux de satisfaction annoncé par la société est donc erroné.

Exercice 2 (5 points)



1) On a R=20 cm

a) Aire du disque = $A_{disque} = \pi\, l^2$
avec $l^2 = R^2 - h^2$ (en utilisant le Théorème de Pythagore)
soit $l^2 = 400 - h^2$
Donc : Volume du cône = 1/3 x A_{disque} x h = 1/3 π (400-h²) h

b) Pour que V(h) soit maximal il faut que sa dérivée V'(h) soit nulle.
V(h) = 1/3 π (400-h²) h, est une fonction dérivable sur ℝ par produit.

V'(h) = π/3 (-2hh + (400 - h²)1)
V'(h) = π/3 (-2h² + 400 – h²)
V'(h) = π/3 (400 – 3h²)

On résout l'équation V'(h) = 0
<=> π/3 (400 – 3h²) = 0
<=> 400 – 3h² = 0
<=> 400 = 3h²
<=> 400/3 = h²
<=> $h = 20\,\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5\,cm\,(seule\ solution\ de\ hmax\ acceptable)$

D'où $V_{max} = V(h_{max})$
$V_{max} = 1/3\ \pi\ (400 - h_{max}^2)\ h_{max}$

$$Vmax = 1/3\ \pi\,(400 - (20\,\frac{\sqrt{3}}{3})^2)\times 20\,\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 3224{,}5\ cm^3$$

c) En prenant h = h_{max}, le rayon l du disque de base vaut alors :

$$l = \sqrt{400 - 20\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{800}{3}} = 20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{cm}$$

Le périmètre du cercle de la base vaut alors :

$$p = 2\,\pi l = 2\,\pi\;20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{cm}$$

Le périmètre du cercle à découper vaut :

$$P = 2\pi\,R \quad \text{cm}$$

et l'arc de cercle Rα correspond à la différence des deux périmètres: P – p

D'où : $2\,\pi\,R - 2\,\pi\;20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = R\,\alpha$

<=> $\alpha = 2\,\pi\left(1 - 2\,\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

<=> $\alpha = 2\,\pi\,\dfrac{\left(1 - 2\,\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\times 180}{\pi} \approx 66\,°$

2) Soit R quelconque,

On a avec le même raisonnement :
$V(h) = 1/3\,\pi\,(R^2 - h^2)\,h$
$V'(h) = \pi/3\,(R^2 - 3h^2)$
d'où $h_{max} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

On trouve alors $l = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

donc $p = 2\,\pi\,R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *et* $P = 2\,\pi\,R$

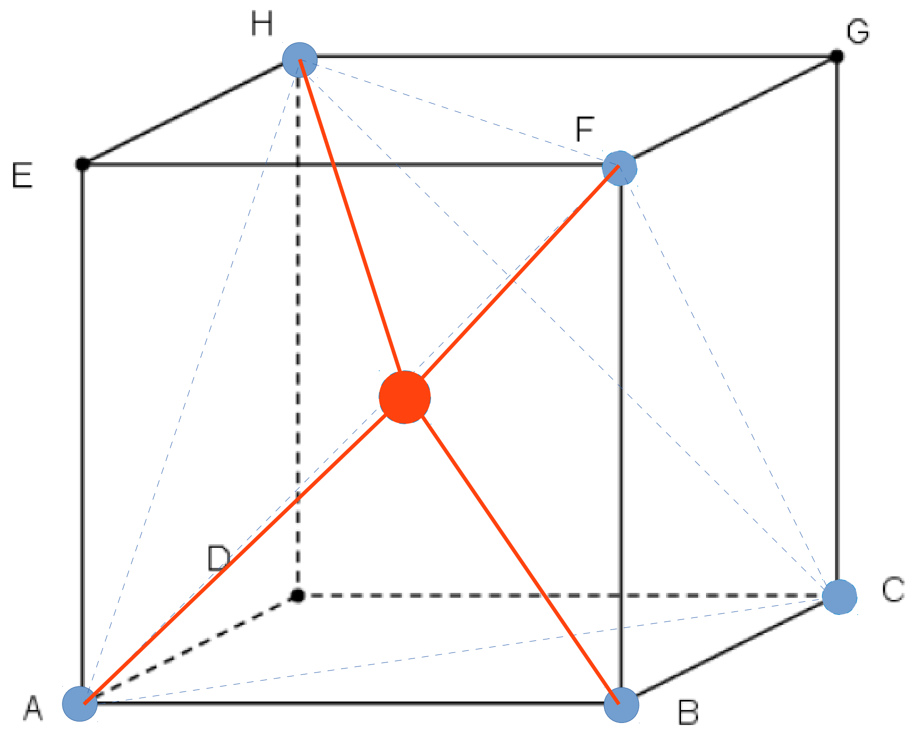
D'où $R\,\alpha = P - p = 2\,\pi\,R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

<=> $\alpha = 2\,\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

En conclusion, l’angle α ne dépend pas de R.

Exercice 3 (4 points)

1) Si on positionne les 2 autres atomes d'Hydrogène au niveau des sommets E et F on a bien :
[AH]=[AC]=[AF]=[HF]=[FC] = diagonales des carrés correspondant aux faces du cube.
Donc ACFH forme un tétraèdre régulier.



2) L'atome de carbone doit être à égale distance des atomes d'hydrogène. Or le centre Ω du cube est par définition à égale distance de tous les sommets du cube, donc en particulier de A, F, C et H.
Donc l'atome de carbone est au niveau du centre Ω du cube.

3) Dans le repère orthogonal proposé, on a :
A(0 ; 0 ; 0)
C(1 ; 1 ; 0)
Ω(0,5 ; 0,5 ; 0,5)

Donc :

$\overrightarrow{\Omega C}=(0{,}5\,;0{,}5\,;-0{,}5)$
d'où $\quad \Omega C=\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2}=\sqrt{0{,}75}$

$\overrightarrow{\Omega A}=(-0{,}5\,;-0{,}5\,;-0{,}5)$
d'où $\quad \Omega A=\sqrt{3\times(-0{,}5)^2}=\sqrt{0{,}75}$

Rappel de cours :

$\overrightarrow{AB}=(xB-xA\,;yB-yA\,;zB-ZA)$
$Produit\ scalaire : \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
$En\ repère\ orthonormé : \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=xAxB+yAyB+zAzB$

Donc :

$$\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = \sqrt{0{,}75}\times\sqrt{0{,}75}\times\cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right) = 0{,}75\,\cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right)$$

et $\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = 0{,}5\times(-0{,}5)+0{,}5\times(-0{,}5)+(-0{,}5)\times(-0{,}5) = -0{,}25$

D'où $\cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right) = \dfrac{-0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{-1}{3}$

donc finalement : $\widehat{A\,\Omega\,C} = \arccos\left(\dfrac{-1}{3}\right) \approx 109{,}5\,°$

Exercice 4 (5 points)

Partie A – Cas général

$$v(t) = 9{,}81\,\frac{m}{k}\left(1-e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

1) La fonction v est dérivable sur R

$$v'(t) = 9{,}81\times\frac{m}{k}\times\frac{k}{m}\times e^{\frac{-k}{m}t} = 9{,}81\,e^{\frac{-k}{m}t} > 0$$

La dérivée est strictement positive, donc la fonction v est strictement croissante sur ℝ, et dans le cas de l'exercice sur $[0,+\infty[$ en particulier.

2) v(t) est strictement croissante donc la goutte ne ralentie jamais.

3) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 9{,}81\,\dfrac{m}{k}\left(1-e^{\frac{-k}{m}t}\right) = 9{,}81\,\dfrac{m}{k} = vlim$

car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$

4) Pour t = 5m/k

$$v(t) = 9{,}81\,\frac{m}{k}\left(1-e^{\frac{-k}{m}\frac{5m}{k}}\right) = 9{,}81\,\frac{m}{k}\left(1-e^{-5}\right)$$

et $1-e^{-5} \approx 0{,}993 > 0{,}99$

donc v(t) > 99% vlim
La vitesse de la goutte dépasse en effet 99% de sa vitesse limite. Le scientifique a raison.

Partie B

m=6 , k=3,9, v= 15 m/s

1) $v\,(t) = 9{,}81\ \dfrac{6}{3{,}9}\,(1 - \mathrm{e}^{\frac{-3{,}9}{6}t})$ et on veut que v(t) = 15 m/s

On résout donc :

$$9{,}81\ \frac{6}{3{,}9}\,(1 - \mathrm{e}^{\frac{-3{,}9}{6}t}) = 15$$

$$\iff \quad 15\,\frac{3{,}9}{6 \times 9{,}81} = 1 - \mathrm{e}^{\frac{-3{,}9}{6}t}$$

$$\iff \quad t = \frac{\ln\,(1 - \dfrac{58{,}5}{58{,}86})}{-0{,}65} \approx 7{,}8\ s$$

2) v(t) est une fonction continue et positive sur [0 ; 7,8] donc

$$Vmoy = \frac{1}{7{,}8 - 0}\int_0^{7{,}8} v\,(t)\,dt = \frac{1}{7{,}8}\int_0^{7{,}8} (\frac{9{,}81 \times 6}{3{,}9}) \times (1 - \mathrm{e}^{\frac{-3{,}9}{6}})\,dt$$

$$= \quad \frac{1}{7{,}8}\,\frac{9{,}81 \times 6}{3{,}9}\,\left[t + \frac{6}{3{,}9}\,\mathrm{e}^{\frac{-3{,}9\,t}{6}}\right]_0^{7{,}8}$$

$$= \quad \frac{1}{7{,}8}\,\frac{9{,}81 \times 6}{3{,}9}\,(7{,}8 + \frac{6}{3{,}9}\,\mathrm{e}^{\frac{-3{,}9 \times 7{,}8}{6}} - \frac{6}{3{,}9})$$

= 12,1 m/s