

Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Spécialité Série S – Centres étrangers Afrique

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit au hasard un sachet dans la production journalière. **La masse de ce sachet, en gramme, est modélisée par la variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$.**

De plus, une observation statistique a montré que 2% des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170g, c'est à dire : $P(X \leq 170) = 0,02$.

Question 1)

Quelle est la probabilité arrondie au centième, de l'événement " la masse du sachet est comprise entre 170 et 180g " ?

→ Réponse b : 0,96

Explications :

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. Par symétrie, la probabilité que la masse soit inférieure à 170g et la probabilité que la masse soit supérieure à 180g sont donc égales. Et on sait que $P(X \leq 170) = 0,02$

Donc $P(170 \leq X \leq 180) = 1 - 2 \times 0,02 = 0,96$

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B. Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2)

Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

→ Réponse a : 0,72

Explications :

On note Da la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés.

Da suit une loi Binomiale de paramètre $n = 50$, $p = 0,05$ car :

- on effectue 50 tirages aléatoires et indépendants des bonbons de la machine A.
- l'événement " le bonbon prélevé aléatoirement est déformé " a une probabilité $p = 0,05$.
- Da compte le nombre de bonbons déformés.

On cherche $P(Da \geq 2)$:

$$P(Da \geq 2) = 1 - P(Da = 0) - P(Da = 1) = 1 - \binom{50}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{50} - \binom{50}{1} \times 0,05^1 \times 0,95^{49} \approx 0,72$$

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. **Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.** Dans un test de contrôle, on prélève au hasard dans l'ensemble de la production. **Celui-ci est déformé.**

Question 3)

Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

→ Réponse c : 0,44

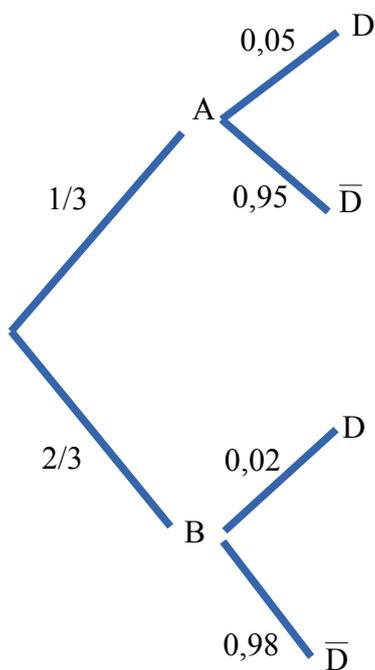
Explications :

On note D l'événement " le produit est déformé".

On note A l'événement " le produit vient de la machine A".

On note B l'événement " le produit vient de la machine B".

On cherche $P_D(B)$.



D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)}$$

avec :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{1}{3} \times 0,05 + \frac{2}{3} \times 0,02 = 0,03$$

$$\text{et } P(D \cap B) = \frac{2}{3} \times 0,02$$

$$\text{d'où } P_D(B) = \frac{\frac{2}{3} \times 0,02}{0,03} \approx 0,44$$

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4)

Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

→ Réponse a : 0,45

Explications :

Y suit une loi exponentielle de paramètre λ d'espérance $E = 1/\lambda$

$$\text{D'où } \lambda = \frac{1}{E} = \frac{1}{500}$$

$$P(Y \leq 300) = 1 - e^{-\frac{1}{500} \times 300} \approx 0,45$$

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au **niveau de confiance de 95 % avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05**. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5)

Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

→ Réponse c : 1600

Explications :

Soit f la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n , l'intervalle de confiance de 95 % est tel que :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{(n)}} ; f + \frac{1}{\sqrt{(n)}} \right] \text{ avec une amplitude } A = \frac{2}{\sqrt{(n)}}$$

On veut donc que :

$$A \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(n)}} \geq \frac{1}{0,05} \Leftrightarrow \sqrt{(n)} \geq \frac{2}{0,05} = 40 \Leftrightarrow n \geq 1600 \text{ (car } n \text{ positif)}$$

EXERCICE 2 (4 points)

$$d1 : \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases} \quad d2 : \begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \end{cases} \quad t \text{ et } t' \text{ appartenant à } \mathbb{R}$$

1) $A(2;3;0)$

On a donc $x_A=2$, $y_A=3$ et $z_A=0$

Si on choisit $t=0$, les coordonnées de A vérifient bien d1.

En effet :

$$\begin{cases} x=2+0=x_A \\ y=3-0=y_A \\ z=0=z_A \end{cases}$$

2) Les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite de représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \text{ sont } (a,b,c)$$

Donc :

$$\vec{u}_1=(1, -1, 1) \text{ est un vecteur directeur de } d_1, \text{ et } \vec{u}_2=(2, 1, 0) \text{ est un vecteur directeur de } d_2.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites d1 et d2 ne sont donc pas parallèles.

3) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1=(1, -2, -3) \cdot (1, -1, 1) = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_2=(1, -2, -3) \cdot (2, 1, 0) = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 0 = 2 - 2 = 0$$

4) Soit P, plan passant par A et dirigé par \vec{u}_1 et \vec{v}

4.a)

Propriété 1 :

On dit que \vec{n} est normal au plan s'il est orthogonal aux vecteurs directeurs de ce plan.

Pour P d'équation cartésienne : $5x + 4y - z - 22 = 0$ on a $\vec{n} = (5, 4, -1)$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{u}_1=(5, 4, -1) \cdot (1, -1, 1) = 5 - 4 - 1 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}=(5, 4, -1) \cdot (1, -2, -3) = 5 - 8 + 3 = 0$$

Donc le vecteur n est bien normal au plan P.

Propriété 2 :

L'unique plan P passant par A de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\text{Soit } M(x, y, z) \quad M \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) + 4(y-3) - z = 0 \Leftrightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0$$

Une équation cartésienne du plan P est donc bien : $5x + 4y - z = 0$

4.b) On résout le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
 d_2 \cap P &= \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \\ 5x + 4y - z - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \\ 5(-5 + 2t') + 4(-1 + t') - 5 - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \\ 14t' - 56 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \\ t' = \frac{56}{14} = 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 2 \times 4 \\ y = -1 + 4 \\ z = 5 \\ t' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 5 \\ t' = 4 \end{cases} \text{ donc } d_2 \text{ coupe } P \text{ en } B(3; 3; 5)
 \end{aligned}$$

5) On considère Δ la droite dirigée par $\vec{v} = (1, -2, -3)$ et passant par $B(3; 3; 5)$.

5.a) Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta: \{M(x, y, z); \overrightarrow{BM} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow \left\{ M(x, y, z); \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k+3 \\ y = -2k+3 \\ z = -3k+5, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5.b) On cherche l'éventuelle intersection des deux droites :

$$\begin{cases} 2+t = k+3 \\ 3-t = -2k+3 \\ t = -3k+5 \end{cases}, k, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+5-3k = k+3 \\ 3-5+3k = -2k+3 \\ t = -3k+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = -3k+5 = 2 \end{cases}$$

Pour $t = 2$ on a : $\begin{cases} x = 2+t = 4 \\ y = 3-t = 1 \\ z = t = 2 \end{cases}$ donc C, point d'intersection de d_1 et Δ existe et a pour

coordonnées $(4; 1; 2)$.

5.c) Le but du problème était de trouver une droite Δ qui soit à la fois sécante à d_1 et d_2 et orthogonales à ces deux droites.

- D'après la question 3, la droite Δ est orthogonale à d_1 et d_2 par orthogonalité des vecteurs directeurs.
- D'après la question 4b, B appartient à la fois à Δ et à d_2
- D'après la question 5b, les droites d_1 et Δ sont sécantes en C.

Donc, la droite Δ est bien orthogonale et sécante avec d_1 et d_2 .

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

$$f(t) = 20e^{-0,1t}, t \in [0, +\infty[\quad f(0) = 20 \mu\text{g/L}$$

1) $t_{0,5}$ est telle que $f(t_{0,5}) = \frac{1}{2} f(0)$

On résout donc :

$$20e^{-(0,1t)} = 10 \Leftrightarrow e^{-(0,1t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-\ln(2)}{-0,1} \Leftrightarrow t = 10 \ln(2)$$

Ainsi, $t_{0,5} = 10 \ln(2) \approx 6,9$ h

2) Le médicament est éliminé dès que $f(t) < 0,2 \mu\text{g/L}$

$$\begin{aligned} f(t) \leq 0,2 &\Leftrightarrow 20e^{-(0,1t)} \leq 0,2 \Leftrightarrow e^{-(0,1t)} \leq 0,01 \Leftrightarrow -0,1t \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow t \geq \frac{(\ln(0,01))}{-0,1} \\ &\Leftrightarrow t \geq -10 \ln(0,01) \Leftrightarrow t \geq 10 \ln(100) \approx 46,1 \text{ h} \end{aligned}$$

Il faut donc plus de 46h pour que le médicament soit éliminé.

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 20e^{-(0,1t)} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20 \left[\frac{1}{-0,1} e^{-(0,1t)} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20 \left(\frac{e^{-(0,1x)}}{-0,1} - \frac{1}{-0,1} \right) = 200$$

$$\text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc l'ASC pharmacocinétique vaut bien 200 $\mu\text{g.h/L}$

Partie B

$$g(t) = 20(e^{-(0,1t)} - e^{-t}), \quad t \in [0, +\infty[\quad \text{et } g(0) = 0 \mu\text{g/L}$$

1) g est dérivable sur $[0, +\infty[$ car exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} .

$$g'(t) = 20(-0,1e^{-(0,1t)} - e^{-t}) = 20e^{-t}(-0,1e^{-0,9t} + 1) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$$

2) Étudions le signe de $g'(t)$:

$$e^{-t} \geq 0 \text{ par définition de la fonction exponentielle.}$$

On cherche donc le signe de $1 - 0,1e^{-(0,9t)}$:

$$1 - 0,1e^{-(0,9t)} \geq 0 \Leftrightarrow 0,1e^{-(0,9t)} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-(0,9t)} \leq 10 \Leftrightarrow t \leq \frac{(\ln(10))}{0,9} \approx 2,56$$

D'où :

x	0	$\frac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$	$+\infty$
g'(x)		+	0 -
variations de g	0	\nearrow	$g\left(\frac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$ \searrow

La durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale vaut donc environ 2,56h c'est à dire 2 heures et 34 min.

Partie C

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 20 \text{ et } u_{n+1} = 0,5 u_n + 20$$

1) Soit P la propriété suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$$

Initialisation de la récurrence :

Pour $n=1$:

$$u_1 = 20 \quad \text{et} \quad u_1 = 40 - 40 \times 0,5 = 40 - 20 = 20$$

La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété P soit vérifiée au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$u_{n+1} = 0,5 u_n + 20 = 0,5(40 - 40 \times 0,5^n) + 20 = 20 - 40 \times 0,5^{(n+1)} + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$$

Conclusion :

La propriété est vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ quand $-1 < q < 1$

3) L'équilibre est atteint dès que $u_n \geq 38 \mu\text{g/L}$. On résout l'inéquation suivante :

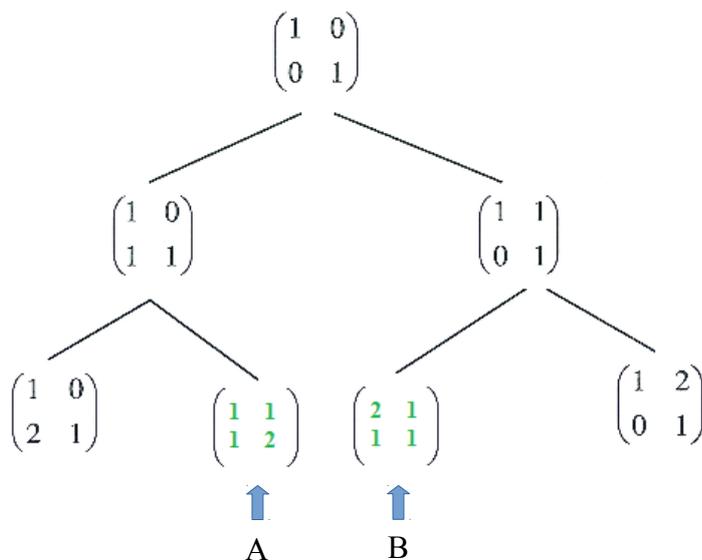
$$u_n \geq 38 \Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geq 38 \Leftrightarrow 40 \times 0,5^n \leq 2 \Leftrightarrow 0,5^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \ln(0,5) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,5)} \approx 4,3$$

(car $\ln(0,5) < 0$, on inverse donc l'inégalité)

Comme n est un entier, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre l'équilibre vaut 5.

EXERCICE 4 (5 points) - Spécialité

1) On réalise l'arbre de Stern-Brocot avec pour matrice initiale la matrice identité I_2 :



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b+d \neq 0$$

2) Le trajet " gauche droite gauche" en partant de la matrice initiale identité aboutit à la matrice C suivante : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Sa fraction correspondante vaut alors :

$$f = \frac{(2+1)}{(3+2)} = \frac{3}{5}$$

3) On note $\Delta_M = ad - bc$, déterminant de M

3.a) Montrons que si $\Delta_M = ad - bc = 1$ alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$

On remarque que :

$$d(a+c) - c(b+d) = da + dc - cb - cd = ad - bc = \Delta_M$$

Donc $\Delta_M = 1$ alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$

$$3.b) \quad M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } \Delta_{M \times G} = (a+c)d - (b+d)c = ad - bc = 1 \quad (\text{avec } QI)$$

De même toutes les autres matrices N de l'arbre ont leur déterminant égal à 1

$$4) \text{ On sait que : } \Delta_N = d(a+c) - c(b+d) = 1$$

D'après le Théorème de Bézout, on en déduit que les entiers $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux. La fraction de ces deux entiers $f = \frac{(a+c)}{(b+d)}$ est donc irréductible.

5) a)

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

5.b) Conjecture : Cet algorithme permet de trouver le chemin à suivre à partir de la matrice identité pour aboutir à la fraction $\frac{m}{n}$ donnée.

Vérifications pour obtenir la fraction associée $\frac{4}{7}$

Il faut suivre le chemin « gauche droite gauche gauche ».

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T \text{ a pour fraction } f : \quad f = \frac{(3+1)}{(5+2)} = \frac{4}{7}$$

On retombe bien sur les valeurs de n et m souhaitées.