Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Spécialité Série S – Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A – Durée d’attente

1) D1, variable aléatoire modélisant la durée d'attente d'un client Internet suit la loi exponentielle de paramètre λ=0,6.

a) La durée d'attente moyenne correspond à l'espérance de la variable D1.
Pour une loi exponentielle :
E(D1) = 1/ λ
E(D1) = 1/0,6 = 1,667 minutes = 1 minute et 40 secondes

b) $P(D1 \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-5 \times 0{,}6} = 0{,}95$
La probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes est donc égale à 0,95.

2) D2, variable aléatoire modélisant la durée d'attente d'un client mobile, suit la loi exponentielle de paramètre λ, un réel strictement positif.

a) $P(D2 \leq 4) = 0{,}798$
et $P(D2 \leq 4) = 1 - e^{-4\lambda}$
d'où $1 - e^{-4\lambda} = 0{,}798$
<=> $e^{-4\lambda} = -(0{,}798 - 1)$
<=> $-4\lambda = \ln(0{,}202)$
<=> $\lambda = -\ln(0{,}202)/4 \simeq 0{,}4$

b) λ=0,4

On cherche à savoir si P(D2 ≥5) < 10 %:

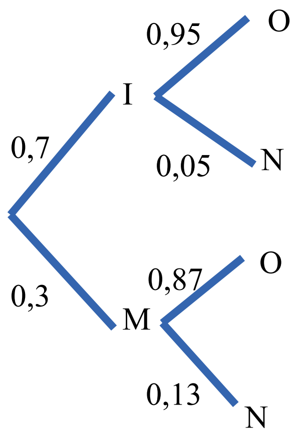
$P(D2 \geq 5) = e^{-0{,}4 \times 5} = 0{,}135 > 0{,}1$
On ne peut donc pas considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur.

Partie B – Obtention d’un opérateur

On note les événements suivants :

O : " Obtenir un opérateur "
N : " Ne pas obtenir d'opérateur"
I : " L'appel provient d'un client internet "
M : " L'appel provient d'un client mobile "

On modélise la situation par l'arbre de probabilités suivant :



1) $P(O) = P(I \cap O) + P(M \cap O)$ d'après la formule des probabilités conditionnelles
$= (0,7 \times 0,95) + (0,3 \times 0,87)$
$= 0,926$

Donc la probabilité qu'un client joigne un opérateur est de 0,926.

2) On cherche à savoir si la probabilité de I " l'appel provient d'un client internet" sachant N "ne pas obtenir d'opérateur" est inférieure ou supérieure à la probabilité de M " l'appel provient d'un client mobile" sachant N "ne pas obtenir d'opérateur".

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$P_N(I) = P(I \cap N) / P(N)$
Or $P(I \cap N) = P(I) \times P_I(N)$
Donc finalement :

$P_N(I)= P(I) \times P_I(N) / P(N)$
$P_N(I)= (0,7 \times 0,05) / (1-0,926) = 0,473$

et
$P_N(M) = P(M \cap N)/ P(N)$
Or $p(M \cap N) = P(M) \times P_M(N)$
Donc finalement :

$P_N(M) = P(M) \times P_M(N) / P(N)$
$P_N(M) = (0,3 \times 0,13) / (1-0,926) = 0,527$

Donc $P_N(M) > P_N(I)$, il est donc plus probable que le client soit un client mobile.

Partie C – Enquête de satisfaction

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur. On a donc une probabilité de satisfaction : $p = 0,85$
Pour savoir si cette probabilité est juste, une enquête est faite sur un échantillon de $n=1303$ clients, 1150 d'entre eux se disent satisfaits. La fréquence expérimentale de satisfaction est alors :
$f = 1150/1303= 0,883$

Au seuil de 95 %, l'intervalle de confiance est le suivant :

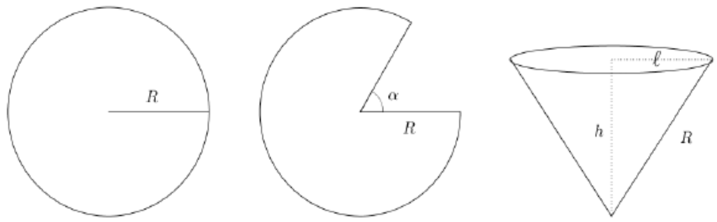
$$I = [\ p - 1{,}96\ \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\ \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ]$$

$$I = [\ 0{,}85 - 1{,}96\ \frac{\sqrt{0{,}85(1-0{,}85)}}{\sqrt{1303}}\ ;\ 0{,}85 + 1{,}96\ \frac{\sqrt{0{,}85(1-0{,}85)}}{\sqrt{1303}}\ ]$$

I = [0,830 ; 0,869]

On remarque que f = 0,883 n'appartient pas à I.
En conclusion, le taux de satisfaction annoncé par la société est donc erroné.

Exercice 2 (5 points)



1) On a R=20 cm

a) Aire du disque = $A_{disque} = \pi\ l^2$
avec $l^2 = R^2 - h^2$ (en utilisant le Théorème de Pythagore)
soit $l^2 = 400 - h^2$
Donc : Volume du cône = 1/3 x A_{disque} x h = $1/3\ \pi\ (400-h^2)\ h$

b) Pour que V(h) soit maximal il faut que sa dérivée V'(h) soit nulle.
$V(h) = 1/3\ \pi\ (400-h^2)\ h$, est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit.

$V'(h) = \pi/3\ (-2hh + (400 - h^2)1)$
$V'(h) = \pi/3\ (-2h^2 + 400 - h^2)$
$V'(h) = \pi/3\ (400 - 3h^2)$

On résout l'équation V'(h) = 0
<=> $\pi/3\ (400 - 3h^2) = 0$
<=> $400 - 3h^2 = 0$
<=> $400 = 3h^2$
<=> $400/3 = h^2$
<=> $h = 20\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5\, cm\ (seule\ solution\ de\ hmax\ acceptable)$

D'où $V_{max} = V(h_{max})$
$V_{max} = 1/3\ \pi\ (400 - h_{max}^2)\ h_{max}$
$$Vmax = 1/3\ \pi\ (400 - (20\ \frac{\sqrt{3}}{3})^2) \times 20\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 3224{,}5\ cm^3$$

c) En prenant $h = h_{max}$, le rayon l du disque de base vaut alors :

$$l = \sqrt{400 - 20\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{800}{3}} = 20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{cm}$$

Le périmètre du cercle de la base vaut alors :

$$p = 2\,\pi l = 2\,\pi\ 20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{cm}$$

Le périmètre du cercle à découper vaut :

$$P = 2\pi\ R \quad \text{cm}$$

et l'arc de cercle Rα correspond à la différence des deux périmètres: P – p

D'où : $2\,\pi\,R - 2\,\pi\ 20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = R\,\alpha$

<=> $\alpha = 2\,\pi\left(1 - 2\,\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

<=> $\alpha = 2\,\pi\dfrac{\left(1 - 2\,\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\times 180}{\pi} \approx 66\ °$

2) Soit R quelconque,

On a avec le même raisonnement :

$V(h) = 1/3\ \pi\ (R^2 - h^2)\ h$

$V'(h) = \pi/3\ (R^2 - 3h^2)$

d'où $h_{max} = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

On trouve alors $l = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - R\frac{^2}{3}} = R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

donc $p = 2\,\pi\,R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ et\ P = 2\,\pi\,R$

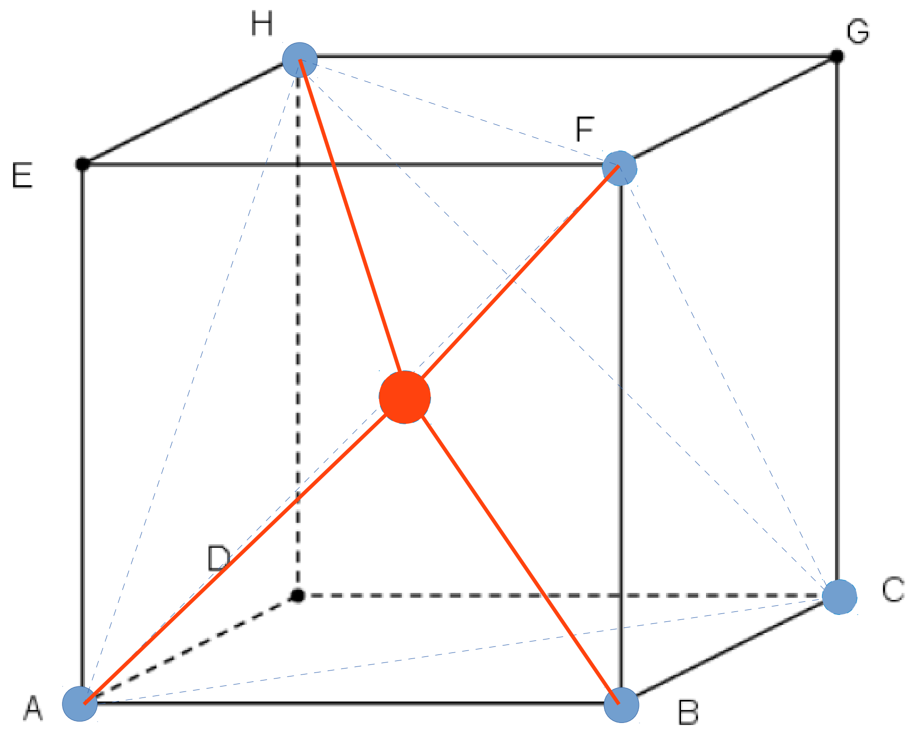
D'où $R\,\alpha = P - p = 2\,\pi\,R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

<=> $\alpha = 2\,\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

En conclusion, l’angle α ne dépend pas de R.

Exercice 3 (4 points)

1) Si on positionne les 2 autres atomes d'Hydrogène au niveau des sommets E et F on a bien :
[AH]=[AC]=[AF]=[HF]=[FC] = diagonales des carrés correspondant aux faces du cube.
Donc ACFH forme un tétraèdre régulier.



2) L'atome de carbone doit être à égale distance des atomes d'hydrogène. Or le centre Ω du cube est par définition à égale distance de tous les sommets du cube, donc en particulier de A, F, C et H.
Donc l'atome de carbone est au niveau du centre Ω du cube.

3) Dans le repère orthogonal proposé, on a :
A(0 ; 0 ; 0)
C(1 ; 1 ; 0)
Ω(0,5 ; 0,5 ; 0,5)

Donc :

$$\overrightarrow{\Omega C}=(0{,}5\,;0{,}5\,;-0{,}5)$$

d'où $\Omega C=\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2}=\sqrt{0{,}75}$

$$\overrightarrow{\Omega A}=(-0{,}5\,;-0{,}5\,;-0{,}5)$$

d'où $\Omega A=\sqrt{3\times(-0{,}5)^2}=\sqrt{0{,}75}$

Rappel de cours :

$$\overrightarrow{AB}=(xB-xA\,;yB-yA\,;zB-ZA)$$
$$Produit\ scalaire : \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$En\ repère\ orthonormé : \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=xAxB+yAyB+zAzB$$

Donc :

$$\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = \sqrt{0{,}75} \times \sqrt{0{,}75} \times \cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right) = 0{,}75\,\cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right)$$

et $\overrightarrow{\Omega A}\,.\,\overrightarrow{\Omega C} = 0{,}5 \times (-0{,}5) + 0{,}5 \times (-0{,}5) + (-0{,}5) \times (-0{,}5) = -0{,}25$

D'où $\cos\left(\widehat{A\,\Omega\,C}\right) = \dfrac{-0{,}25}{0{,}75} = \dfrac{-1}{3}$

donc finalement : $\widehat{A\,\Omega\,C} = \arccos\left(\dfrac{-1}{3}\right) \approx 109{,}5\,°$

Exercice 4 – Spécialité (5 points)

Partie A

1) Il y a 15,9 % de O dans le texte codé. La lettre E a donc été codée en lettre O d'après le tableau des fréquences.
Il y a 9,4 % de E dans le texte codé. La lettre A a donc été codée en lettre E d'après le tableau des fréquences.

2) La lettre E a comme n associé l'entier 4, et il est codé en lettre O qui a comme r associé l'entier 14 donc :

$$an + b \equiv 14\,[26]$$
$$4\,a + b \equiv 14\,[26]$$

De même, la lettre A a comme n associé l'entier 0, et il est codé en lettre E qui a comme r associé l'entier 4 donc :

$$an + b \equiv 4\,[26]$$
$$b \equiv 4\,[26]$$

3) On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4\,a + b \equiv 14\,[26] \\ b \equiv 4\,[26] \end{cases} \iff \begin{cases} 4\,a \equiv 10\,[26] \\ b \equiv 4\,[26] \end{cases}$$

On sait donc que b=4, et on trouve les solutions possibles pour a à l'aide d'un tableau de congruences :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4a	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
4a (26)	0	4	8	12	16	20	24	2	6	**10**	14	18	22

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	82	96	100
0	4	8	12	16	20	24	2	6	**10**	14	18	22

Donc a = 9 ou a = 22.

Les couples solutions sont S = {(9 , 4) ; (22 , 4)}.

Partie B

1) a = 22 et b = 4

a) Pour K :
n = 10

$$an + b = 22n + 4$$
$$\Longleftrightarrow \quad 10 \times 22 + 4 = 224$$
$$\Longleftrightarrow \quad 224 = 26 \times 8 + 16$$

donc r = 16 → représente la lettre Q.

Pour X :
n= 23

$$an + b = 22n + 4$$
$$\Longleftrightarrow \quad 23 \times 22 + 4 = 510$$
$$\Longleftrightarrow \quad 510 = 19 \times 26 + 16$$

donc r = 16 → représente la lettre Q.

b) Deux lettres différentes sont codées par la même lettre ce qui est inenvisageable.

2) a = 9 et b = 4

a) $m \equiv 9n + 4\ [26]$
$\Longleftrightarrow 3m \equiv 27\,n + 12\ [26]$
$\Longleftrightarrow 3m \equiv n + 12\ [26]$
$\Longleftrightarrow 3m + 14 \equiv n + 26\ [26]$
$\Longleftrightarrow 3m + 14 \equiv n\ [26]$

b) D'après a) , si la lettre associée au nombre entier n a été codée par la lettre associée au nombre entier m, alors $n \equiv 3m + 14$ [26]

Donc,
Pour A :
La lettre A est associée au nombre $m=0$, donc $n \equiv 3 \times 0 + 14$ [26] <=> $n \equiv 14$ [26]
et 14 est l'entier associé à la lettre O, donc la lettre O a été codée par la lettre A.

Pour Q :
La lettreQ est associée au nombre $m=16$, donc $n \equiv 3 \times 16 + 14$ [26] <=> $n \equiv 62$ [26] <=> $n \equiv 10$ [26]
et 10 est l'entier associé à la lettre K, donc la lettre K a été codée par la lettre Q.

Le mot codé par AQ est donc « OK ».