B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

***Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7*.**

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et
à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

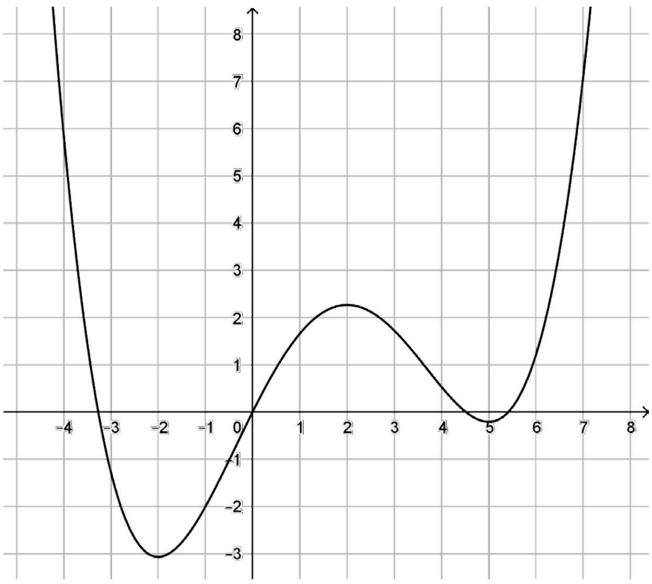
Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.
   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?
   - a) $0{,}20$
   - b) $0{,}62$
   - c) $0{,}38$
   - d) $0{,}58$

2. Pour tout événement E on note $P(E)$ sa probabilité. X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 30 et d'écart type σ. Alors :
   - a) $P(X = 30) = 0{,}5$
   - b) $P(X < 40) < 0{,}5$
   - c) $P(X < 20) = P(X > 40)$
   - d) $P(X < 20) > P(X < 30)$

3. En France, les ventes de tablettes numériques sont passées de 6,2 millions d'unités en 2014 à 4,3 millions d'unités en 2016. Les ventes ont diminué, entre 2014 et 2016, d'environ :
   - a) 65 %
   - b) 31 %
   - c) 20 %
   - d) 17 %

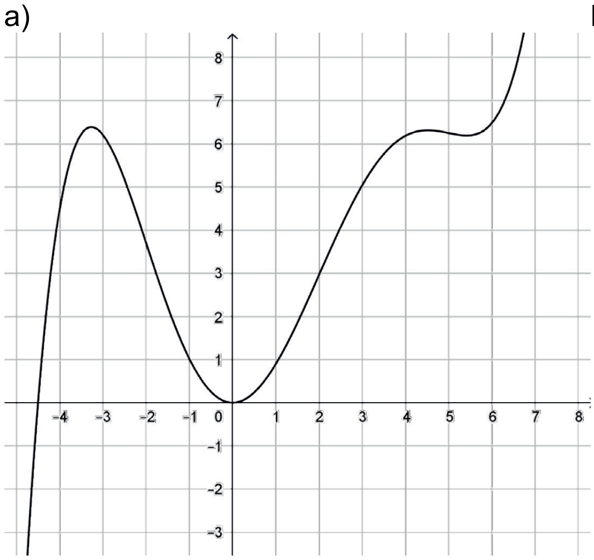
Pour les questions 4 et 5, on donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



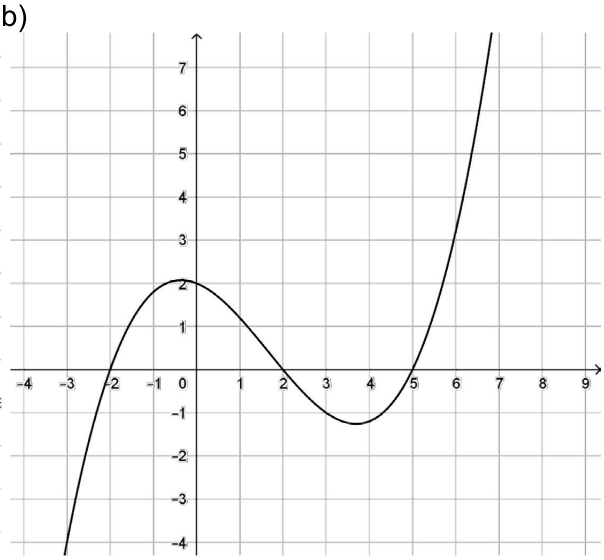
4. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$
   a) f' est positive sur $[2\ ;\ 4]$.
   b) f' est négative sur $[-3\ ;\ -1]$.
   c) F est décroissante sur $[2\ ;\ 4]$.
   d) F est décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$.

5. Une des courbes ci-dessous représente la fonction f''. Laquelle ?

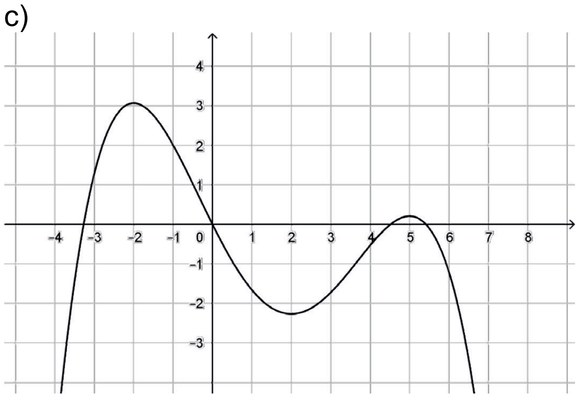
a)



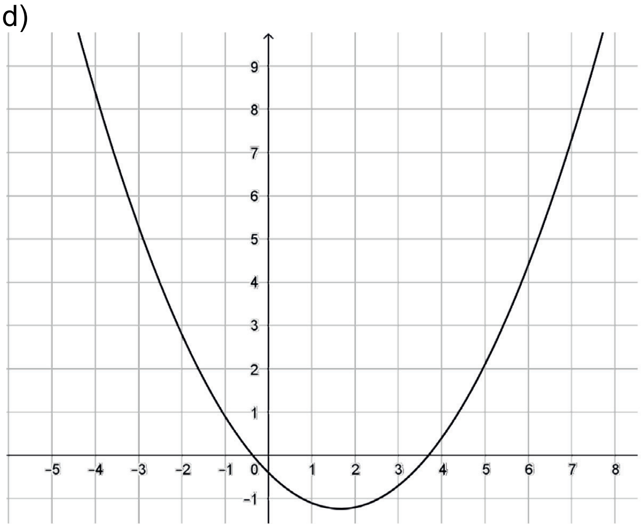
b)



c)



d)



Exercice 2 (4 points)
Commun à tous les candidats

Un navigateur s'entraîne régulièrement dans le but de battre le record du monde de traversée de l'Atlantique à la voile.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Pour tous événements A et B, on note $\bar{A}$ l'événement contraire de A, $P(A)$ la probabilité de A et si B est de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Partie A

Le navigateur décide de modéliser la durée de sa traversée en jour par une loi normale de paramètres $\mu = 7$ et $\sigma = 1$.

1. Quelle est la probabilité que le navigateur termine sa course entre 5 et 8 jours après le départ ?
2. Dans sa catégorie de voilier, le record du monde actuel est de 5 jours.
   Quelle est la probabilité que le navigateur batte le record du monde ?

Partie B

Une entreprise, nommée « Régate », s'intéresse aux résultats de ce navigateur.
La probabilité qu'il réalise la traversée en moins de 6 jours est de 0,16.
Si le navigateur réalise la traversée en moins de 6 jours, l'entreprise le sponsorise avec une probabilité de 0,95.
Sinon, l'entreprise hésite et le sponsorise avec une probabilité de 0,50.
On note :

- M l'événement « la traversée est réalisée par le navigateur en moins de 6 jours » ;
- F l'événement « l'entreprise sponsorise le navigateur ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité que l'entreprise ne sponsorise pas le navigateur à la prochaine course est $0{,}428$.
3. L'entreprise a finalement choisi de ne pas financer le navigateur.
   Calculer la probabilité que le navigateur ait tout de même réalisé la traversée en moins de 6 jours.

Partie C

L'entreprise « Régate » sponsorise plusieurs catégories de sportifs dans le monde nautique. Ces derniers doivent afficher le slogan « Avec Régate, j'ai 97 % de chance d'être sur le podium ! ».
L'étude des résultats sportifs de l'année a révélé que, parmi 280 sportifs de chez « Régate », 263 sont montés sur le podium. Que penser du slogan ?

Exercice 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour la nouvelle année, Lisa prend la bonne résolution d'aller au travail tous les matins à vélo. Le premier jour, très motivée, Lisa se rend au travail à vélo. Par la suite, elle se rend toujours au travail à vélo ou en voiture.
Elle se rend compte que :

- si elle a pris son vélo un jour, cela renforce sa motivation et elle reprend le vélo le lendemain avec une probabilité de 0,7 ;
- si elle a pris sa voiture un jour, la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est de 0,5.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets A et B où :

- A est l'évènement « Lisa prend le vélo » ;
- B est l'évènement « Lisa prend la voiture ».

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- a_n la probabilité que Lisa aille au travail à vélo le jour n ;
- b_n la probabilité que Lisa aille au travail en voiture le jour n.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b) En déduire la matrice de transition M.

2. a) Donner les valeurs de a_1 et b_1 correspondant à l'état initial.
   b) Calculer la probabilité arrondie au centième que Lisa prenne le vélo le 8e jour.

3. Déterminer l'état stable du graphe puis interpréter le résultat obtenu.

4. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}5b_n$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $a_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}5$.

5. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0{,}626$.

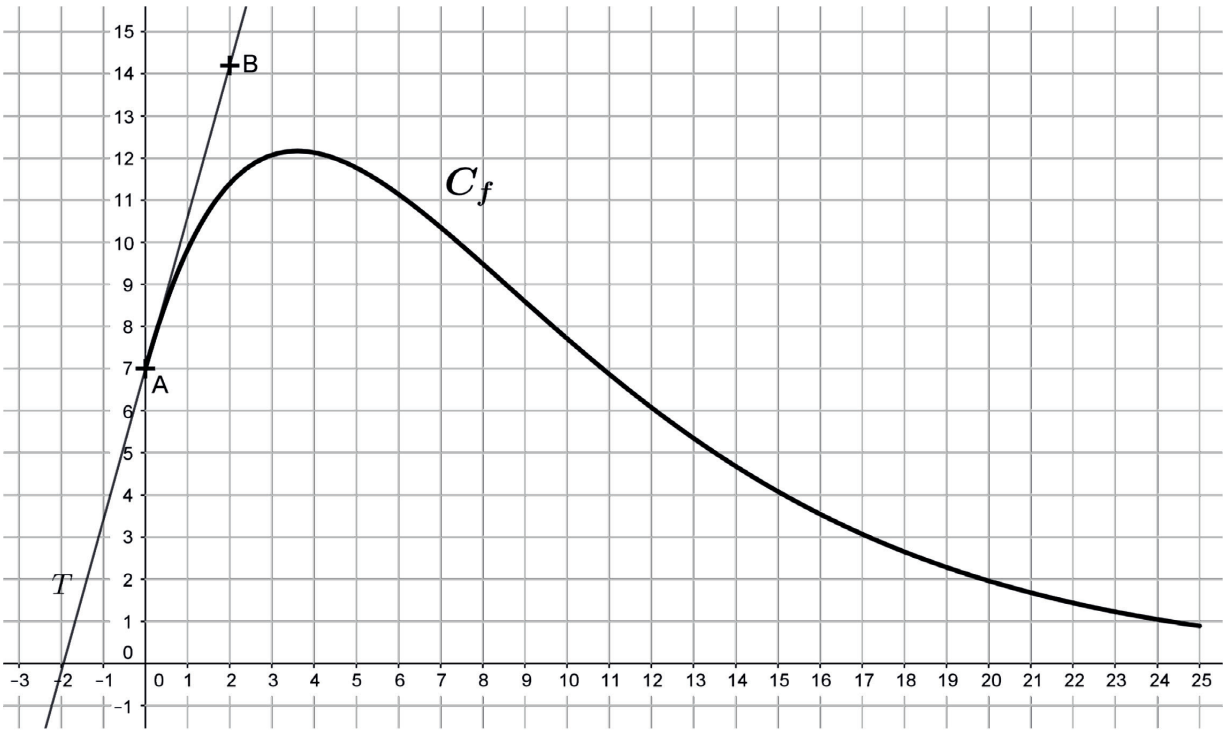
```
N ← 1
A ← 1
Tant que ………… faire
        A ← ………..
        N ← ………..
Fin Tant que
```

   b) Quelle est la valeur de N après exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Partie A

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $[0\,;25]$ par :$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels.
On a représenté également sa tangente T au point $A(0\,;7)$. T passe par le point $B(2\,;14{,}2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.
2. a) Déterminer, par un calcul, le coefficient directeur de la droite T.
   b) Exprimer, pour tout $x \in [0\,;25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b.
   c) Montrer que a et b sont solutions du système $\begin{cases} a - 0{,}2b &= 3{,}6 \\ b &= 7 \end{cases}$.
   En déduire la valeur de a.

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,25]$ par $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$. Justifier.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,25]$. Donner une valeur approchée au dixième de α.
3. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant.

Dériver$((-25x-160)\mathrm{e}^{-0,2x})$
$(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$

Exploiter ce résultat pour donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de $\int_0^{25} f(x)\mathrm{d}x$.

Partie C

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie précédente.

1. Quelle est l'aire en m² de la zone hachurée représentant la piscine ?

2. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.
   Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?