Baccalauréat ES Liban juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.

Partie A

Le tableau suivant donne l'évolution de la production annuelle de turbots dans une ferme aquacole.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
production y_i	650	760	1190	1620	2600	5050

1. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$ dans un repère orthogonal R : sur l'axe des abscisses, on placera O à l'origine et on choisira 2 cm pour une année, sur l'axe des ordonnées, on placera 600 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 turbots.
2. D'après l'allure du nuage quel type d'ajustement peut-on envisager ?

Partie B

Les résultats des questions **1., 2. et 3.** seront arrondis à 10^{-3}.

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

   Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Année	1997	1998	1199	2000	2001	2002
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
z_i						

   Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à la série $(x_i,\ z_i)$.

   a. En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x.

   b. Exprimer y en fonction de x.

   En utilisant la question précédente, répondre aux deux questions suivantes :

   Quelle production peut-on prévoir en 2005 ?

   À partir de quelle année peut-on prévoir que la production annuelle dépassera 30 000 turbots ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles. On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;

b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;

P_n la matrice $[a_n\ b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B.
Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0\ b_0]$.
2. a. Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = [x\ y]$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
Déterminer x et y.
En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.
Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée f et une fonction demande notée g.
Elle sont définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{8} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{120}{e^x + 15}$$

où x représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité x offerte, et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité x demandée.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne respectivement par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sur l'annexe jointe au sujet.
L'annexe sera complétée et jointe à la copie.

Partie A Étude de la fonction demande
Détermination de la quantité échangée et du prix d'équilibre du marché

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
2. g' désigne la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Justifier que : $g'(x) = -\dfrac{120e^x}{(e^x + 15)^2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau de valeurs (arrondir les résultats à 10^{-1}).

x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$										

   b. Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
   c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ et la tangente T sur l'annexe jointe au sujet.

5. On admet que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique n appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant.

   a. Faire apparaître sur le graphique les valeurs p et q.

   b. Vérifier que $q = \ln(25)$.
   En déduire la valeur de p.

Partie B Calcul du « surplus du consommateur »

1. $\mathcal{D}$ est le domaine du plan défini par $\{M(x\ ;\ y)/0 \leqslant x \leqslant q \quad \text{et} \quad p \leqslant y \leqslant g(x)\}$, où p et q sont les valeurs déterminées dans la partie **A. 5.**.
   Hachurer ce domaine $\mathcal{D}$ sur l'annexe jointe au sujet.
2. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$G(x) = 8\left[x - \ln\left(\mathrm{e}^x + 15\right)\right]$$

   Démontrer que G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. On appelle « surplus du consommateur » (en milliers d'euro) le nombre :

$$R = \int_0^q g(x)\,\mathrm{d}x - pq$$

   Justifier que R représente, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
   Calculer la valeur exacte de R.
   Donner une valeur approchée de R à l'euro près.

Annexe à rendre avec la copie