Baccalauréat ES Asie juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le 1er janvier 2003, la population d'un pays s'élevait à 30 millions d'habitants.

On estime que l'augmentation de la population pour les 15 années à venir sera de 2 % par an.

1. Calculer la population au 1er janvier 2004, puis au 1er janvier 2010.
   Les résultats seront donnés en millions et arrondis à 10^{-3}.
2. Quelle est l'augmentation en pourcentage, entre la population au 1er janvier 2003 et la population au 1er janvier 2010 ? Le résultat sera arrondi à 0,1 %.
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation :
$$1,02^x \geqslant 1,2.$$
4. Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires en millions d'euro au 31 décembre de chaque année d'une entreprise depuis sa création en 1996. L'année 1996 a le rang 0.

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires y_i	0,7	1,6	2	2,4	2,5	2,8	3	3

Par exemple, en 1999 le chiffre d'affaires a été de 2,4 millions d'euro.

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse et 2 cm pour un million d'euro en ordonnée).
2. La forme du nuage de points suggère un ajustement de la forme $y = \ln(ax+b)$, où a et b sont deux réels à déterminer.
   a. On pose $z_i = \text{e}^{y_i}$.
   Compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}.)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0,7	1,6	2	2,4	2,5	2,8	3	3
$z_i = \text{e}^{y_i}$	2,014							

   b. Donner l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les calculs seront faits à la calculatrice et les résultats donnés à 10^{-2} près.
   On ne demande aucune justification.
   c. En déduire l'expression de y en fonction de x.
   d. À l'aide de valeurs fournies par la calculatrice, tracer dans le même repère que précédemment (défini à la **question 1**) la courbe d'équation $y = \ln(2,74x + 2,17)$, pour $0 \leqslant x \leqslant 14$.
3. On suppose que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuivra durant la prochaine décennie selon le modèle précédent. Déterminer par le calcul le chiffre d'affaires attendu pour l'année 2004 arrondi à 10^{-1} millions d'euro.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0\,;\,10]$ et pour tout réel y élément de $[0\,;\,12]$ par :

$$f(x\,;\,y) = 2x(y+1).$$

On donne ci-après la représentation graphique de la surface $z = f(x,\ y)$ dans un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.

Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que $x,\ y$ et z sont liés par la relation

$$z = 2x(y+1),$$

où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.

Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

Partie A

1. **a.** Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?

   b. Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.

2. Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $\left(\text{O},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$? Justifier la réponse.

Partie B

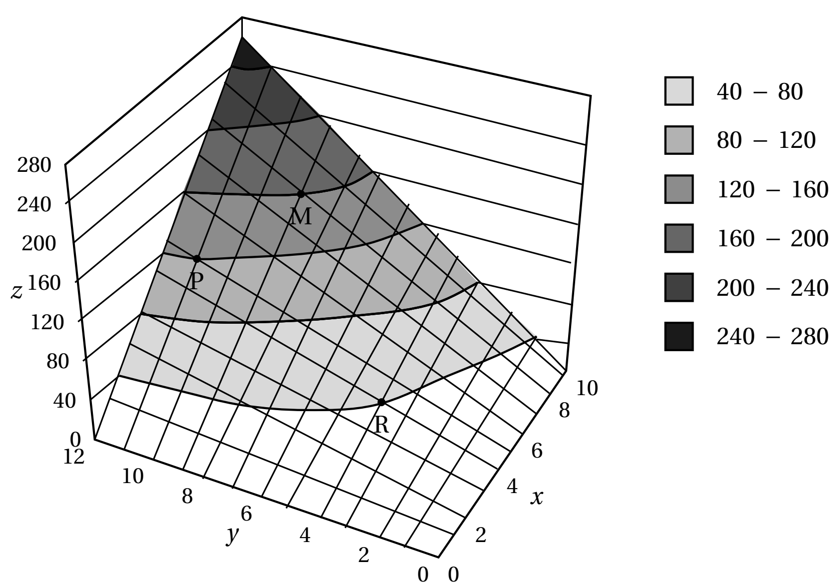
Le prix d'un décilitre d'encre A est 6 € et celui d'un décilitre d'encre B est 2 €.

L'association décide d'investir 46 € dans l'achat des encres.

1. Donner la relation entre les quantités x et y d'encres A et B achetées pour un montant de 46 €.
2. Montrer alors que $z = -6x^2 + 48x$.
3. **a.** Quelle quantité d'encre A l'association achètera-t-elle pour fabriquer le maximum de paquets de cartes ?

   b. Combien de paquets de cartes seront alors fabriqués ?

   c. Quelle quantité d'encre B sera alors utilisée ?



EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

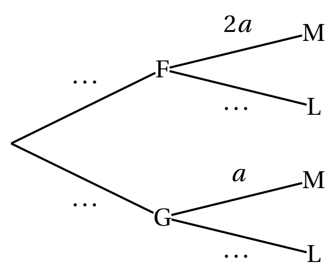
Dans un lycée, on compte 150 élèves de terminale ES dont un tiers de garçons.

- Chaque élève suit l'un des deux enseignements de spécialité : Maths ou LV1.
- 60 % des élèves suivent l'enseignement de spécialité Maths.
- La proportion de filles qui suivent l'enseignement de spécialité Maths est le double de la proportion de garçons qui suivent l'enseignement de spécialité Maths.

On note a la proportion de garçons qui suivent l'enseignement de spécialité Maths.
Dans cet exercice, les questions **1** et **2** sont indépendantes.

1. On interroge au hasard un élève de terminale ES. Chaque élève a donc la même probabilité d'être interrogé. On note :
   - F l'évènement : « l'élève interrogé est une fille »
   - G l'évènement : « l'élève interrogé est un garçon »
   - M l'évènement : « l'élève interrogé suit l'enseignement de spécialité Maths »
   - L l'évènement : « l'élève interrogé suit l'enseignement de spécialité LV1 ».

   a. On note $P_G(M)$ la probabilité de M sachant G. On a alors $P_G(M) = a$.
   L'arbre ci-dessous décrit la situation probabiliste de l'énoncé. Le compléter. Pour le deuxième niveau d'arborescence, donner les valeurs en fonction de a.



   b. Montrer que $a = \dfrac{9}{25}$.

   c. Les évènements M et G sont-ils indépendants ? Justifier.

2. On interroge au hasard, de façon indépendante, trois élèves de terminale ES.
   On admet que cette expérience peut être assimilée à un tirage avec remise, et que chaque élève a la même probabilité d'être interrogé.
   Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois élèves interrogés suive l'enseignement de spécialité Maths ?

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

La courbe Γ ci-dessous est la représentation partielle donnée par la calculatrice de la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par :

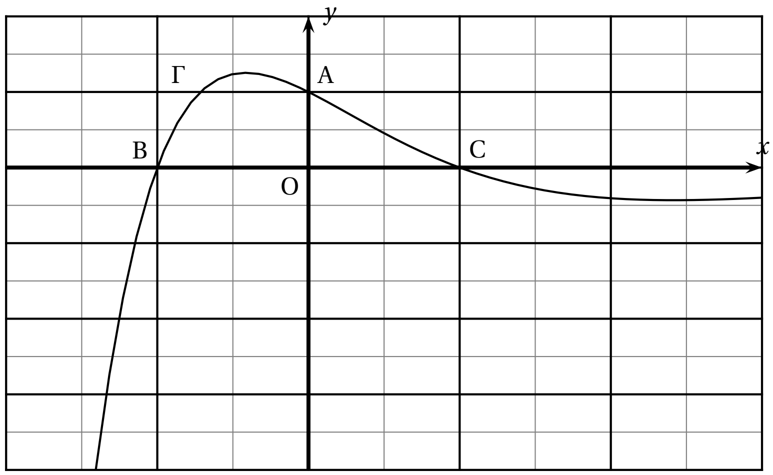
$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

dans un repère orthogonal du plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point A et l'axe des abscisses respectivement en B et C.
Les quatre questions sont indépendantes.

1. On cherche à retrouver les unités.

   a. Calculer les coordonnées des points A, B et C.

   b. Placer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sur la figure ci-dessous.



2. Étude des limites

a. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

b. On sait que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. Développer $f(x)$ et en déduire sa limite en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

3. Étude des variations

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout x réel :

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}.$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.
(Les solutions seront arrondies à 10^{-2}.)
Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Faire apparaître, sur le graphique, le ou les points de la courbe Γ en lesquels celle-ci admet une tangente horizontale.

4. Calcul d'aire

a. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \left(1 + 2x + x^2\right)e^{-x}$. Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

b. Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre la portion de la courbe Γ située au-dessus de l'axe des abscisses et l'axe des abscisses.
Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.