Baccalauréat ES La Réunion juin 2004

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. La fonction f représentée (graphique 1) par la courbe $(\mathcal{C})$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\ln x$$

où a et b sont deux constantes que l'on calculera dans la suite de cette question.

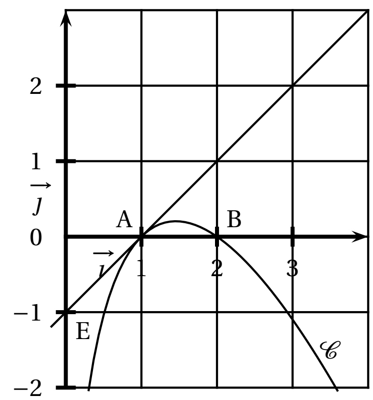
Sur le graphique 1 sont placés les points A(1 ; 0), B(2 ; 0) et E(0 ; −1).

Les points A et B appartiennent à la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (AE) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ en A.

a. Donner par lecture graphique $f(2)$ et $f'(1)$.

b. En déduire que a et b sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1\\ 2a+b & = & 0\end{array}\right.$

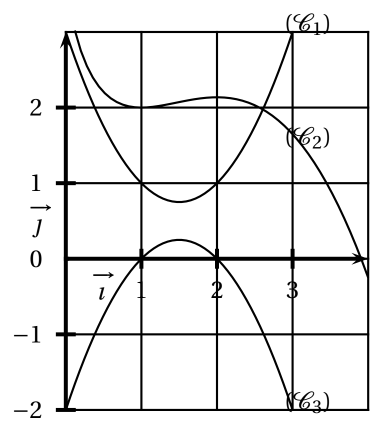
c. Déterminer a et b.



graphique 1

2. Soit G une primitive de la fonction f représentée par la courbe $(\mathcal{C})$ du graphique 1.

Parmi les trois courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ proposées sur le graphique 2, quelle est la seule qui peut représenter G dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$? Justifier votre réponse.



graphique 2

3. On admet à partir de maintenant que f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2\ln x - x\ln x.$$

Le but de la question est de calculer une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\ln x - 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}.$$

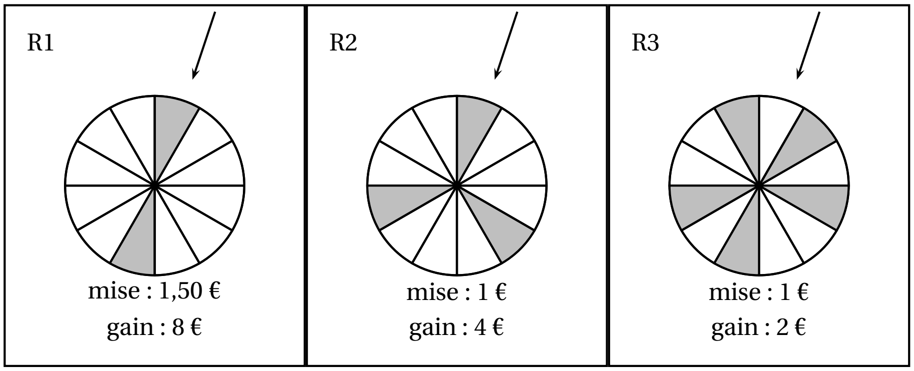
a. Démontrer que la fonction F est la primitive de f qui prend la valeur 2 pour $x = 1$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Exercice 2 (pour les candidats n'ayant pas fait la spécialité) **5 points**

Lors d'une kermesse, dans un stand sont disposées trois roues. Chaque roue est di-

visée en douze secteurs de même aire. Une roue étant lancée, elle s'arrête aléatoirement face à la flèche sur un seul secteur. On admettra que tous les secteurs ont la même probabilité d'être « tirés ».
Pour participer, un joueur choisit l'une des trois roues, acquitte la mise correspondant à la roue choisie, puis lance cette roue.
Si le secteur « tiré » est grisé, le joueur reçoit le gain correspondant à la roue choisie.



1. Le gain algébrique du joueur, noté g, est le gain de la loterie diminué de la mise.

   a. Pour un joueur qui a choisi la roue R1, calculer la probabilité de gagner 6,50 €, puis celle de perdre 1,50 €. En déduire le gain algébrique moyen espéré par tout joueur qui fait le choix de cette roue.

   b. Un joueur dit « avec la roue R2, le jeu est équitable ». Qu'en pensez-vous ?

2. Les organisateurs de la kermesse remarquent que $\frac{1}{6}$ des joueurs ont choisi la roue R1, $\frac{1}{3}$ la roue R2 et les autres la roue R3.
   On interroge au hasard une personne qui a participé au jeu.
   Soit les évènements :
   A : « La personne a choisi la roue R1 »,
   B : « La personne a choisi la roue R2 »,
   C : « La personne a choisi la roue R3 »,
   G : « La personne a gagné » (c'est-à-dire qu'un secteur grisé a été « tiré »).

   a. Donner la probabilité des évènements A et B. En déduire la probabilité de l'évènement C.

   b. Préciser les valeurs de : p_{A}G), p_{B}G) et $p(\text{G})$.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement : « La personne a choisi la roue R2 et elle a gagné » (on pourra traduire les données l'aide d'un arbre pondéré).

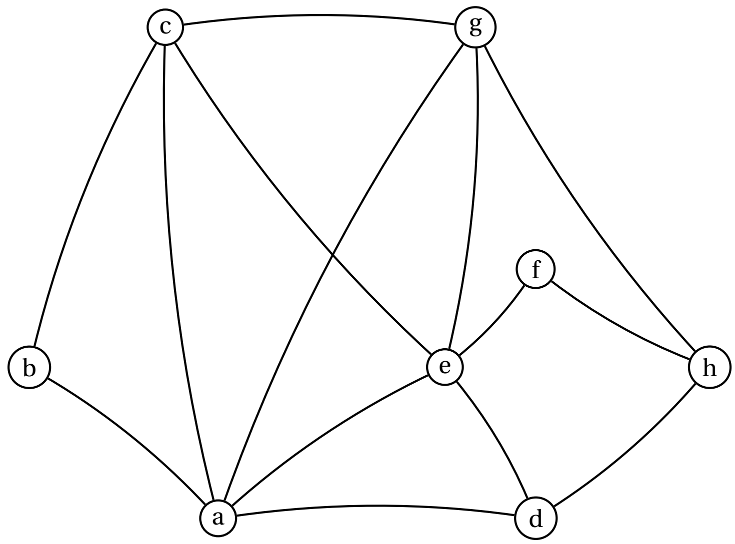
   d. Démontrer que la probabilité de l'évènement : « La personne a gagné » est égale à $\frac{23}{72}$.

   e. Sachant que la personne n'a pas gagné, quelle est la probabilité qu'elle ait joué avec la roue R3 ?

EXERCICE 2 (pour les candidats ayant fait la spécialité) **5 points**

Partie A

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



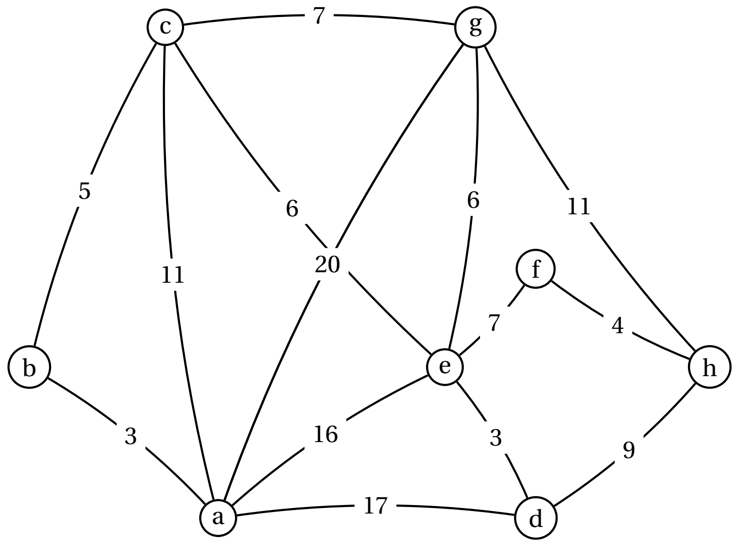
$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

Le graphe précédent représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).



Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.

EXERCICE 3 COMMUN À TOUS LES CANDIDATS **4 points**

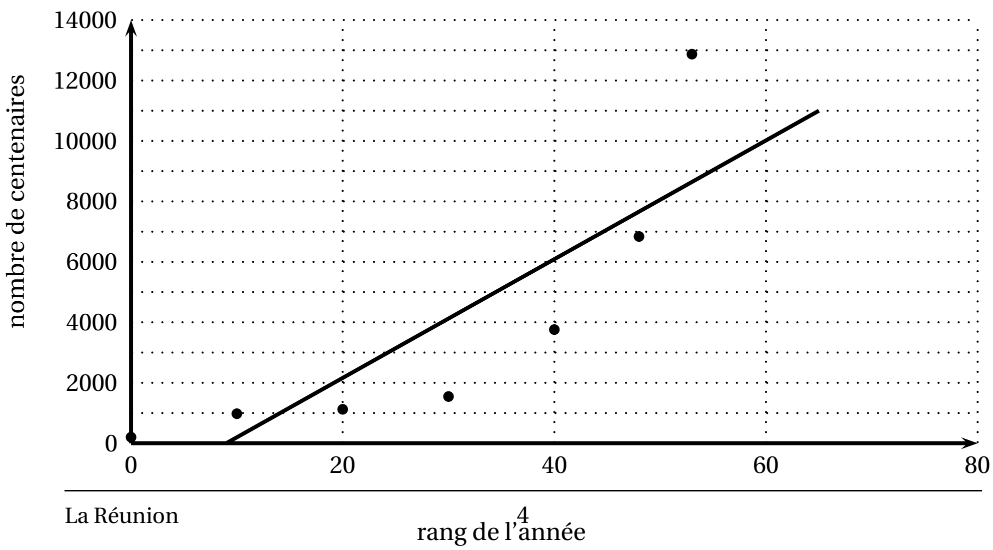
Le tableau suivant donne en France le nombre de centenaires au 1^{er} janvier des années indiquées.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	1998	2003
Rang x_i de l'année	0	10	20	30	40	48	53
Nombre y_i de centenaires	200	977	1122	1545	3760	6840	12 871

1. **a.** Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre de centenaires entre le premier janvier 1950 et le premier janvier 1980 ?

   b. Peut-on affirmer que le nombre de centenaires a augmenté en moyenne de près de 10 % par an entre le premier janvier 1990 et le premier janvier 2003 ?

2. Le nuage de points de la série statistique $(x_i,\ y_i)$ est représenté ci-dessous, ainsi que la droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.



En utilisant le graphique préciser le nombre de centenaires que l'on peut, avec cet ajustement, prévoir au premier janvier 2010. Ce nombre semble-t-il réaliste par rapport aux valeurs observées ?

3. L'allure du nuage de points invite à chercher un ajustement exponentiel. À cette fin, on pose $z = \ln(y_i)$.

a. Recopier et compléter le tableau où les nombres seront arrondis à 10^{-4} près.

Rang x_i de l'année	0	10	20	30	40	48	53
$z_i = \ln(y_i)$							

b. En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x (les coefficients seront arrondis à 10^{-4} près).

c. En déduire une estimation du nombre de centenaires que l'on peut, avec cet ajustement exponentiel, prévoir au premier janvier 2010.

EXERCICE 4 COMMUN À TOUS LES CANDIDATS **6 points**

Une entreprise décide, pour la promotion de nouveaux produits, de mener une campagne publicitaire. Elle envisage la distribution d'un dépliant aux consommateurs.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre d'envois permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal.

1. Soit la fonction R définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$R(x) = x\mathrm{e}^{-0,1x+0,1}.$$

a. Justifier que $R'(x) = (1-0,1x)\mathrm{e}^{-0,1x+0,1}$, où R' désigne la fonction dérivée de R.

b. Étudier les variations de R, puis dresser son tableau de variations. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

2. Une étude préalable a montré que le montant total, en milliers d'euros, des recettes attendues à l'issue de cette campagne peut être estimé par $R(x)$, pour $x \in [1 ; 15]$, où x représente le nombre d'envoi en milliers.

a. Représenter R sur l'intervalle $[1 ; 15]$ (unités graphiques : 1 cm pour un millier d'envois sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un millier d'euros sur l'axe des ordonnées).

b. Le coût total en milliers d'euros de cette campagne est $C(x) = 0,4 + 0,3x$ pour $x \in [1 ; 15]$.

Représenter cette fonction dans le même repère que celui utilisé pour la fonction R.

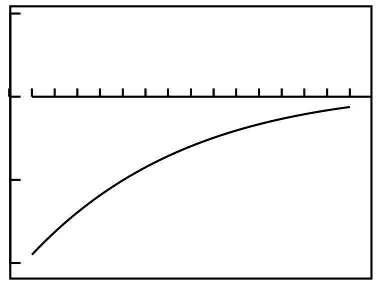
3. Le bénéfice envisagé à l'issue de cette campagne publicitaire est donné par $B(x) = R(x) - C(x)$ pour tout réel x de $[1 ; 15]$.

a. Donner, avec la seule précision que l'on peut obtenir par lecture graphique, les valeurs de x qui assurent un bénéfice positif.

b. On nomme B' la fonction dérivée de la fonction B. Établir que $B'(x) = (1-0,1x)\mathrm{e}^{-0,1x+0,1} - 0,3$.

c. Soit B'' la fonction dérivée de B'. Voici la courbe représentative de B'' telle qu'elle apparaît à l'écran d'une calculatrice graphique.

L'axe des abscisses est gradué de 1 en 1 depuis 0 jusqu'à 15. L'axe des ordonnées est gradué de 0,1 en 0,1 de $-0,2$ à 0,1.



Donner par lecture graphique le signe de B'' puis dresser le tableau de variations de B' sur $[1\,;\,15]$.

d. En déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;\,15]$, dont on donnera, à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-2}.

e. Déterminer sur $[1\,;\,15]$, le signe de $B'(x)$.

4. Quel est le nombre d'envois, arrondi à la dizaine près, nécessaire pour obtenir un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice ?