

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

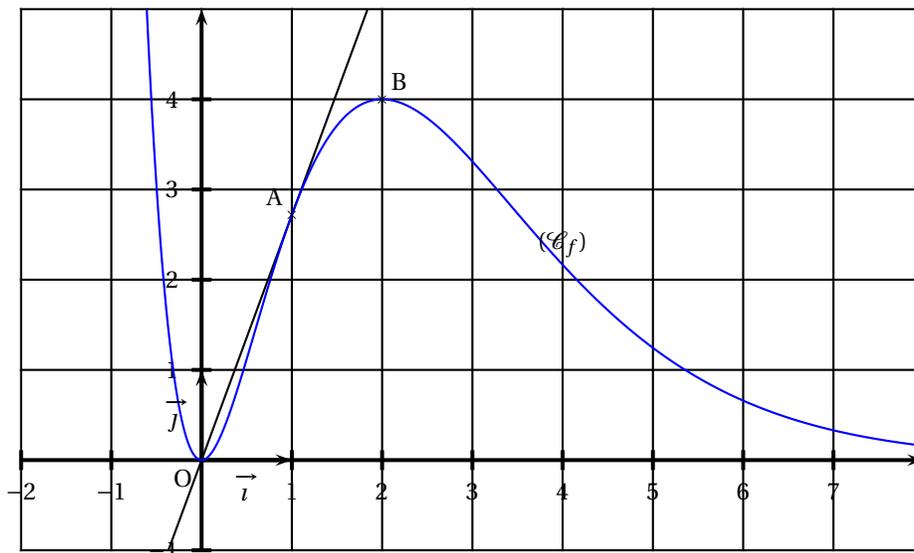
On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe (\mathcal{C}_f) :

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et sur l'intervalle $[2; +\infty[$;
- la courbe (\mathcal{C}_f) passe par l'origine du repère et par les points $A(1; e)$ et $B(2; 4)$;
- la droite (OA) est tangente en A à la courbe (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses est asymptote à (\mathcal{C}_f) en $+\infty$.

On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur \mathbb{R} telle que $F(0) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, en utilisant les informations données par l'énoncé, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe 1 à rendre avec votre copie. Il n'est pas demandé de justifier les réponses. Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en rapporte aucun. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
3. $f'(1) = f(1)$.
4. $\int_0^2 f(x) dx < 5$.
5. $\int_1^3 f(x) dx < 1$.
6. La fonction F est croissante sur \mathbb{R} .
7. $F(5) > F(6)$.
8. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

EXERCICE 2**5 points****Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.

On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.

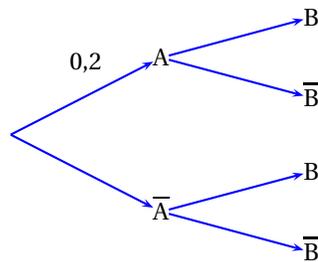
Partie I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- \bar{A} l'évènement contraire de A , \bar{B} l'évènement contraire de B .

1. a. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



- b. Donner la probabilité de \bar{B} sachant A et la probabilité de \bar{B} sachant \bar{A} .
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.
- b. Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $0,16$.
- c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Partie II

Pour chacune des personnes contactées, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5000 lecteurs potentiels.

EXERCICE 3**5 points****Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service « bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2001 à l'année 2006.

y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1^{er} janvier de l'année de rang x_i ,

q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier de l'année de rang x_i .

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients : y_i (en milliers)	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à « bank.net » : q_i (en milliers)	45	53	63	74	87	103

Les séries statistiques $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; q_i)$ sont représentées sur la figure de l'annexe 2.

1.
 - a. Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier de l'année 2001 (donner le résultat arrondi à l'unité).
 - b. Calculer le taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2006 (ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité).
2. Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.
 - a. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondie à l'unité.
 - b. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque au premier janvier 2010.
3. La forme du nuage de points de coordonnées $(x_i ; q_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.
 En effectuant le changement de variable $z_i = \ln(q_i)$, on obtient la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés d'équation $z = 0,165x + 3,642$.
 - a. En déduire une expression de q en fonction de x de la forme $q = kA^x$ et donner les valeurs approchées arrondies au centième des constantes k et A .
 - b. On admet que l'évolution du nombre de clients abonnés à « bank.net » entre les années 2001 et 2006 peut être modélisée par la relation $q = 38,17 \times (1,18)^x$. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier 2010.
 - c. Quel serait, selon l'estimation obtenue à la question 2. b. et l'estimation précédente, le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier 2010?
4. On suppose que, jusqu'au 1^{er} janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2. a. et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question

3.b.

À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016?

Qu'en pensez-vous?

EXERCICE 4**6 points**

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

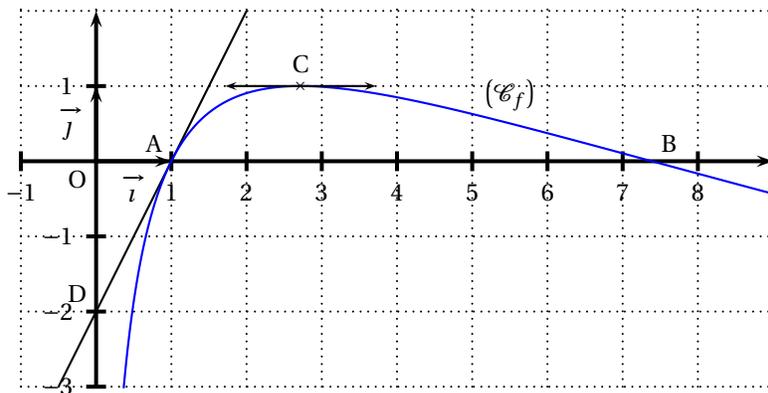
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x) \ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative (\mathcal{C}_f) de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La courbe (\mathcal{C}_f) coupe l'axe des abscisses en $A(1; 0)$ et en B .

La tangente en C à la courbe (\mathcal{C}_f) est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe (\mathcal{C}_f) coupe l'axe des ordonnées en D .



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.
 - a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$

- b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. a. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x[f(x) + 2 \ln x - 4].$$

Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- b. Calculer $\int_1^{e^2} f(x) dx$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Annexe 1 (à rendre avec sa copie)

Exercice 1

Affirmations	V	F
a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.		
b. L'équation $f(x) = 0, 1$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .		
c. $f'(1) = f(1)$.		
d. $\int_0^2 f(x) dx < 5$.		
e. $\int_1^3 f(x) dx < 1$.		
f. La fonction F est croissante sur \mathbb{R} .		
g. $F(5) > F(6)$.		
h. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.		

Annexe 2

Exercice 3

Représentation graphique des séries statistiques $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; q_i)$

