Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

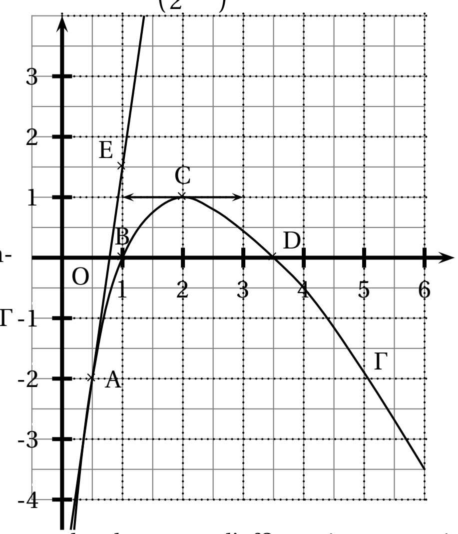
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est tracée ci-dessous.

Elle passe par les points $A\left(\frac{1}{2}~;~-2\right)$, $B(1~;~0)$, $C(2~;~1)$ et $D\left(\frac{7}{2}~;~0\right)$.

E est le point de coordonnées $\left(1~;~\frac{3}{2}\right)$.

La courbe Γ admet au point C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (AE) est tangente à la courbe Γ au point A.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe, à rendre avec la copie.

Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
2. Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\frac{1}{7}$.
3. Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1~;~2]$.
4. Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1~;~\frac{7}{2}\right]$.
5. On peut calculer $\ln[f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
6. La fonction g définie sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.

Le tableau cl-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

Le détail des calculs statistiques à effectuer à la calculatrice n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ le nuage des points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ associé à cette série statistique.
On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnées. Sur l'axe des ordonnées, on commencera la graduation à 120.

2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$

a. On désigne par G_1, le point moyen des trois points M_1, M_2 et M_3 du nuage et par G_2 le point moyen des trois points M_4, M_5 et M_6 du nuage.
Calculer les coordonnées respectives de G_1 et de G_2 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Déterminer l'équation réduite $y = Ax + B$ de la droite (G_1G_2) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les coefficients A et B seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.
Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

c. En utilisant la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement du nuage, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.

3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés,

a. Soit Δ la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite Δ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. En utilisant la droite Δ, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.

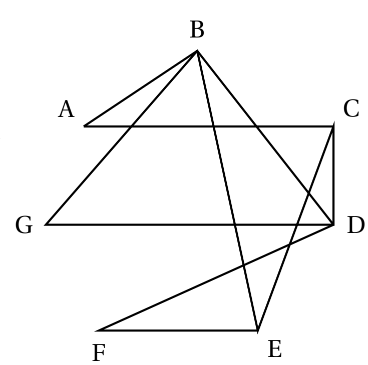
4. **a.** Si le taux d'augmentation du nombre d'adhérents d'une année à l'autre était fixe et égal à $t\,\%$, quelle serait la valeur de t arrondie au centième qui donnerait la même augmentation du nombre d'adhérents entre 2000 et 2005 ?

b. Avec ce même taux d'augmentation t, quel serait le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, pour l'année 2007 ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur le graphe cl-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

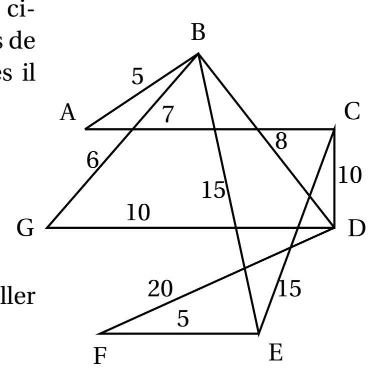
1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?

2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.
Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :
AB : 5 ; AC : 7 ;
BD : 8 ; BE : 15 ;
BG : 6 ;CD : 10 ;
CE : 15 ; DF : 20 ;
DG : 10 ; EF : 5 ;
Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.



En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 55 % des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves qui ont un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable.
De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au centième donc les pourcentages à l'unité.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : on choisit au hasard un élève de ce lycée.
On note :
- M l'évènement : « L'élève possède un ordinateur » ;
- T l'évènement : « L'élève possède un téléphone portable » ;
- $\overline{M}$ l'évènement contraire de M ;
- $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. **a.** Calculer la probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable.

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable.

2. **a.** On prend 0,90 comme valeur de la probabilité de l'évènement T.
Calculer la probabilité que l'élève ne possède pas d'ordinateur mais possède un téléphone portable.

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur.

Partie B : on choisit trois élèves au hasard, indépendamment les uns des autres.
On note E l'évènement : « Exactement deux des trois lycéens choisis possèdent un

ordinateur ».
Calculer la probabilité de l'évènement E.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
On considère la fonction h définie et dérivable sur R par

$$h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 6.$$

On note h' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   b. Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$; on pourra utiliser l'égalité vraie pour tout réel x : $h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 7 + 6\mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Calculer $h\left[\ln\left(\frac{7}{2}\right)\right]$, $h(0)$ puis $h(\ln 6)$.
3. Déterminer par le calcul l'image $h'(x)$ d'un réel x par la fonction h' et étudier les variations de la fonction h.
   Dresser le tableau de variations de la fonction h et faire figurer les résultats des questions précédentes dans ce tableau.
4. En déduire le tableau des signes de la fonction h.

Partie B
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 6 - 6\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{x} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan d'unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données en annexe.

1. Démontrer que le point de coordonnées $(\ln 6\ ;\ 5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{-h(x)}{\mathrm{e}^{x}}$.
   b. Déterminer, par le calcul, la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.
   a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en cm^2 puis en donner une valeur approchée arrondie au centième.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 1

Affirmation	V	F
1. L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.		
2. Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\dfrac{1}{7}$.		
3. Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1~;~2]$.		
4. Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1~;~\dfrac{7}{2}\right]$.		
5. On peut calculer $\ln[f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.		
6. La fonction g définie sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ par $g(x) = \text{e}^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.		

Exercice 4