Correction Bac ES – France – juin 2010

Exercice 1 (4 points) (*Commun à tous les candidats*)
Pour une meilleure compréhension, les réponses seront justifiées dans ce corrigé.

Question 1
Le nombre –3 est solution de l'équation : $\ln(e^x) = -3$

En effet, on sait que pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$ et donc, $\ln(e^x) = -3 \Leftrightarrow x = -3$.

Question 2
La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$ est $-\dfrac{1}{4}$

En effet, on sait que la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{(2x)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Question 3
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation : $y = x + 2$

En effet, cette tangente a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
On a : $f(1) = 3\ln(1) - 2\times1 + 5 = 3$ et $f'(x) = 3\times\dfrac{1}{x} - 2$ d'où, $f'(1) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi, la tangente a pour équation : $y = 1(x-1) + 3$ soit, $y = x + 2$.

Question 4
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. **Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est : –1

En effet, le gain suit la loi de probabilité suivante :

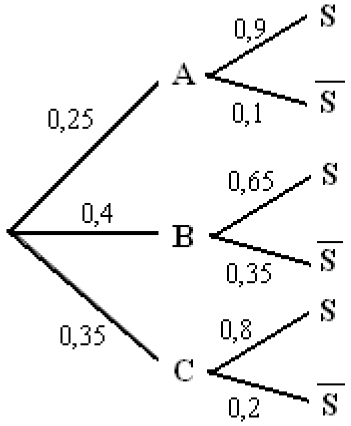
Gain	7	–2	–3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Son espérance est : $7\times\dfrac{1}{6} + (-2)\times\dfrac{2}{6} + (-3)\times\dfrac{3}{6} = -1$

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1) Comme : 25 % des employés ont un ordinateur Aliet, on a : p(A) = 0,25.
40 % des employés ont un ordinateur Balart, on a : p(B) = 0,4.
Comme le reste des employés a un ordinateur Celt, les événements A, B et C forment une partition et ainsi, p(A) + p(B) + p(C) = 1 d'où, p(C) = 1 – 0,25 – 0,4 = 0,35.

Parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_A(S) = 0{,}9$.
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_B(S) = 0{,}65$
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance donc, $p_C(S) = 0{,}8$.
On a donc l'arbre pondéré suivant :



2) On a : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}225$.
Donc, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est de 0,225.

3) Comme les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la ormule des probabilités totales, on a :
$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$
$p(S) = 0{,}225 + 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}35 \times 0{,}8$
$p(S) = 0{,}765$.

4) On a : $p_S(C) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(S)} = \dfrac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}765} = 0{,}366$ à 10^{-3} près.
Donc, sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt est égale à 0,336.

Exercice 2 (5 points) (*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Soit x le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges « confort » produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle [0 ; 3] par :
$F(x , y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.
$F(x , y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaine de milliers d'euros**, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

1) $F(1,2 ; 1,6) = 1,2^2 - 2\times1,2 + 1,6^2 - 4\times1,6 + 6 = 1,2$.
   Donc, en janvier 2010, le coût de production a été de 1,2 dizaine de milliers d'euros soit de 12 000 €.

2) Pour tout x et y réels, on a : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 1$
   Soit, $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

   De ce qui précède, on déduit que : $F(x , y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$.
   Comme un carré est toujours positif, le coût de production sera minimal quand les carrés seront nuls, c'est-à-dire quand $x = 1$ et $y = 2$ et $F(1 ; 2) = 1$.
   Ainsi, le coût de production mensuel est de 10 000 euros et il est atteint pour une production de 100 sièges « luxe » et 200 sièges « confort ».

3) À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges et exactement 250.
   a. La production mensuelle est de $x + y$ centaines de sièges. Or, 250 = 2,5 centaines.
      Donc, on a : $x + y = 2,5$ soit, $y = 2,5 - x$.

      Ainsi, le coût peut s'écrire : $F(x ; y) = x^2 - 2x + (2,5 - x)^2 - 4(2,5 - x) + 6$
      $F(x ; y) = x^2 - 2x + 6,25 - 5x + x^2 - 10 + 4x + 6$
      $F(x ; y) = 2x^2 - 3x + 2,25$.

   b. On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2,5] par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$.
      La fonction f est une fonction trinôme dont la parabole est « tournée vers le haut » car $a = 2 > 0$ et elle change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.
      On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	0,75	2,5
f	2,25 $\searrow$	1,125	$\nearrow$ 7,25

   c. La fonction f atteint son minimum 1,125 pour $x = 0,75$ et $y = 2,5 - x = 1,75$.
      Donc, en juillet 2010, l'équipementier doit produire 75 sièges « luxe » et 175 sièges « confort » pour un coût de production minimal égal à 11 250 €.

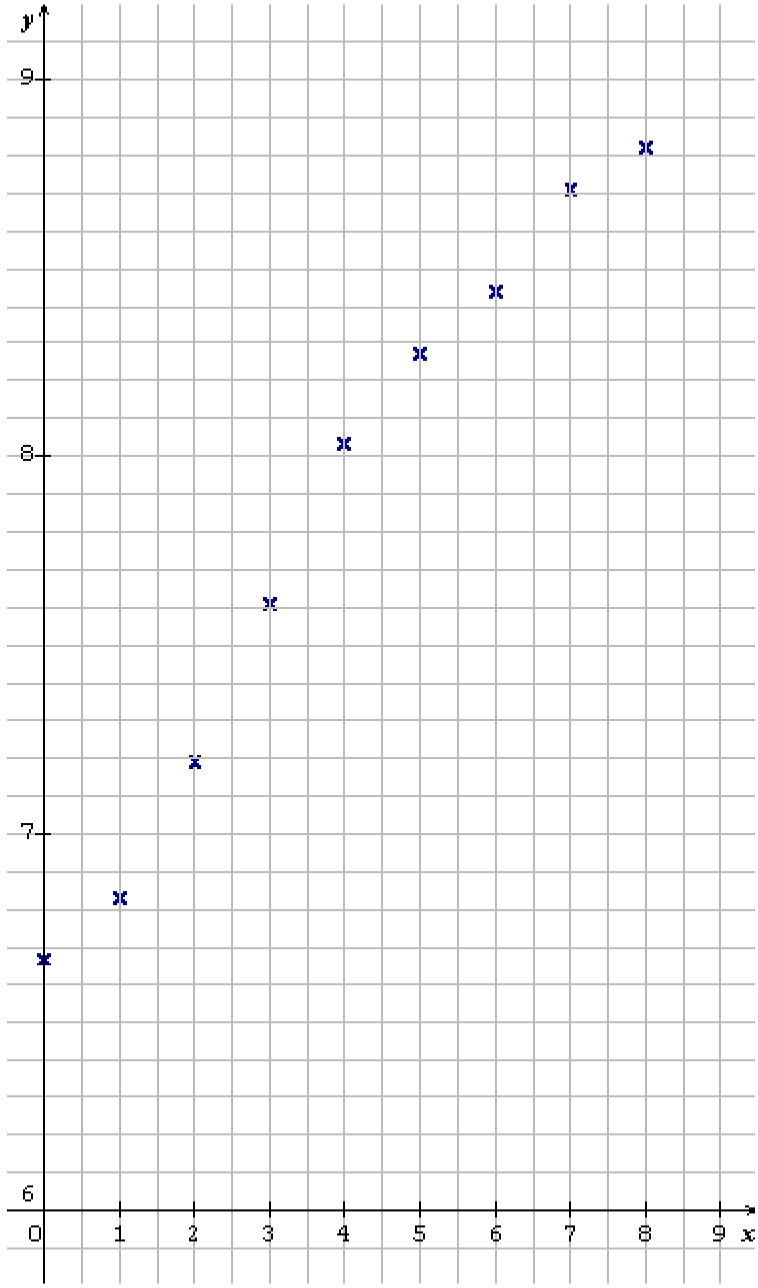
Exercice 3 (5 points) (*Commun à tous les candidats*)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).
On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Partie A : Observation des données

1) On a le nuage de points suivant :



2) On a : $\dfrac{8{,}82-6{,}67}{6{,}67}\times 100 = 32{,}23$ à 10^{-2} près.

Ainsi, la valeur du SMIC horaire brut a augmenté de 32,23 % entre 2001 et 2009.

3) Soit x le coefficient multiplicateur associé au taux annuel moyen d'augmentation entre 2001 et 2005.

Alors, le coefficient multiplicateur global est : $x^4 = \dfrac{8{,}03}{6{,}67}$

Ainsi, $x = \sqrt[4]{\dfrac{8{,}03}{6{,}67}} = 1{,}0475$ à 10^{-4} près.

Donc, le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est bien de 4,75 %.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\,;\,y_i)_{4 \leqslant i \leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03 \times 1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005+n, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1) $2012 = 2005 + 7$ et $8{,}03 \times 1{,}024^7 = 9{,}48$ à 10^{-2} près.
Donc, si ce modèle reste valable, en 2016, le SMIC horaire brut serait de 9,48 €.

2) On cherche n tel que $8{,}03 \times 1{,}024^n \geqslant 10$.

$$\begin{aligned}
8{,}03 \times 1{,}024^n \geqslant 10 \quad &\Leftrightarrow 1{,}024^n \geqslant \frac{10}{8{,}03}\\
&\Leftrightarrow \ln(1{,}024^n) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right) \text{ car la fonction ln est croissante.}\\
&\Leftrightarrow n \ln(1{,}024) \geqslant \ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)}{\ln(1{,}024)} \text{ car } \ln(1{,}024) > 0.
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{10}{8{,}03}\right)}{\ln(1{,}024)} \approx 9{,}25$

C'est donc à partir de l'année 2015, 2005 + 10, que la valeur du SMIC horaire brut dépassera 10 euros.

Exercice 4 (6 points) (*Commun à tous les candidats*)

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\,\mathrm{e}^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116\ln(x+1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1) a. On a : $f'(x) = 153\times 0,05\mathrm{e}^{0,05x}$.
Comme pour tout x réel, $\mathrm{e}^{0,05x} > 0$, $f'(x) > 0$ (produit de nombres positifs).
Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].

b. On a : $g'(x) = -116\times\dfrac{1}{x+1}$
Comme pour tout réel $x \in [0 ; 35]$, $x + 1 > 0$, $g'(x) < 0$.
Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].

c. Le point E semble avoir pour coordonnées (8,9 ; 240).

2) Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
Pour cela on considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. On a : $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + (-g'(x))$.
Pour tout $x \in [0 ; 35]$, on a : $g'(x) < 0$ donc, $-g'(x) > 0$ et on a : $f'(x) > 0$ donc, par somme de nombres positifs, $h'(x) >0$ pour $x \in [0 ; 35]$.
Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur [0 ; 35].

b. La fonction h est continue et strictement croissante sur [0 ; 35].
De plus, $h(0) = 153 - 504 < 0$ et $h(35) \approx 792 > 0$.
Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle [0 ; 35].

c. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $x_0 \approx 8,871$.

d. $y_0 = f(x_0) = f(8,871) \approx 238,41$.

e. De la question précédente, on déduit que le prix unitaire d'équilibre de cet appareil est de 238,41 € et pour ce prix, 8 871 appareils sont disponibles.

3) On prendra dans cette question $x_0 = 8{,}871$ et $y_0 = 238{,}41$.

a. $f(x) = 153\mathrm{e}^{0{,}05x}$ donc, une primitive est : $F(x) = 153\times\dfrac{1}{0{,}05}\,\mathrm{e}^{0{,}05x} = 3\,060\,\mathrm{e}^{0{,}05x}$.

b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0\times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voir le graphique pour le domaine du plan dont l'aire, en u.a. est le nombre réel S.

On a : $\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(0) = 3\,060\mathrm{e}^{0{,}05\,x_0} - 3\,060$

D'où, $S = 8{,}871\times 234{,}41 + 3\,060 - 3\,060\,\mathrm{e}^{0{,}05\,x_0} \approx 406{,}754$.