Baccalauréat TL – Juin 2010 – corrigé

Exercice 1 (5 points)

1. On place un projecteur, qui est donc une source de lumière ponctuelle, au point **H**.
   a) Sur ce dessin représenter l'ombre du mât sur le sol. (Voir la figure de l'annexe 1 ci-dessous)
   On place le point n, intersection des droites **(BM)** et **(HN)**. L'ombre du mat sur le sol est le segment **[Mn]**.
   b) On note **P** le milieu du mât. Construire l'ombre **p** du point **P**.
   p est l'intersection de **(HP)** et de **(BM)**.
   *On remarque que **p** n'est pas le milieu de **[Mn]**. (non demandé)*

2. À une certaine heure, les rayons du soleil sont parallèles à la droite **(GC)**.
   a) Sur l'annexe 2, représenter l'ombre au soleil du mât sur le sol à cette heure. (voir la figure de l'annexe 2 ci-dessous)
   On place le point **N'**, intersection de **(BM)** et de la parallèle à **(GC)** passant par **N**.
   L'ombre au soleil du mât est le segment **[MN']**
   b) L'ombre au soleil du milieu du mât est-elle le milieu de l'ombre du mât ? Justifier.
   Oui, l'ombre au soleil du milieu est le milieu de l'ombre car les rayons du soleil sont des droites parallèles et, en application du théorème de Thalès, si **P** est le milieu de **[MN]**, alors **P'** est le milieu de **[MN']**.

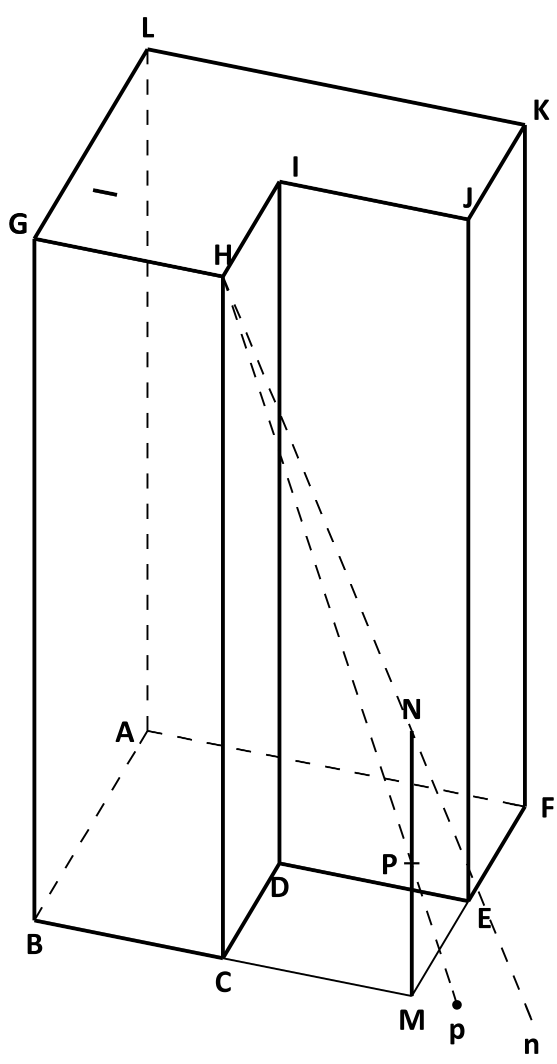


figure de l'annexe 1

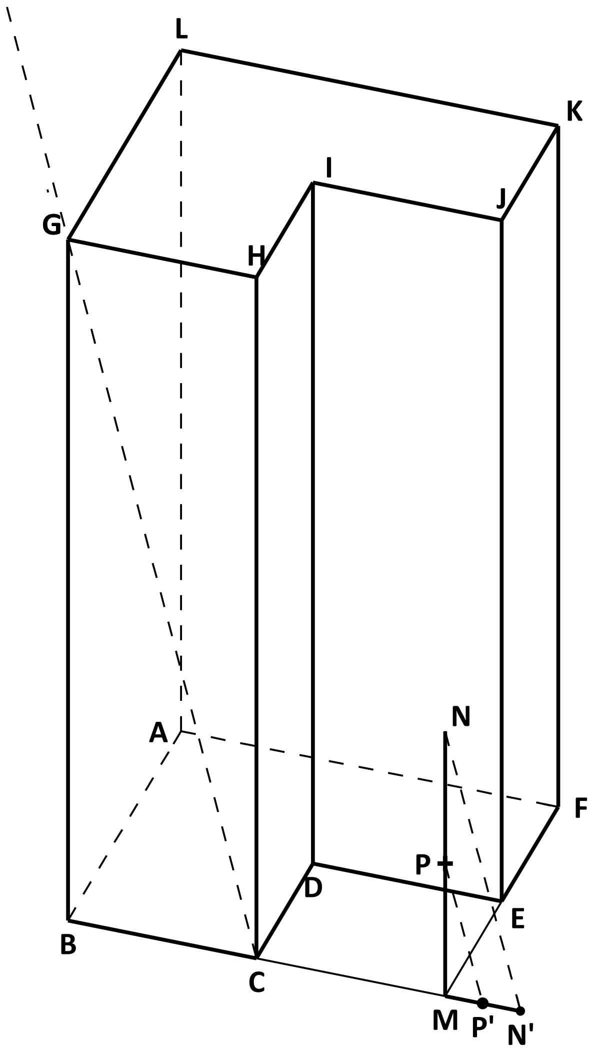
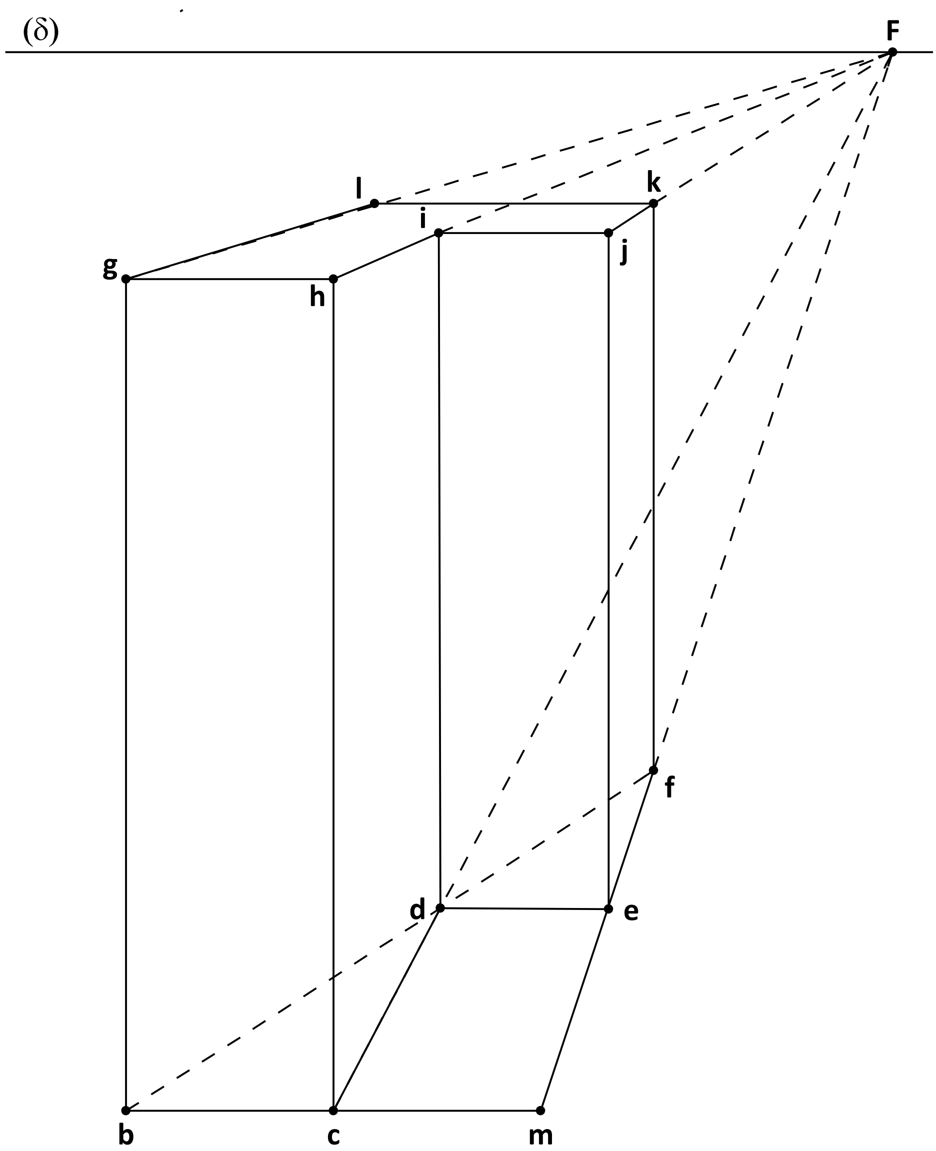


figure de l'annexe 2

3. Construction en perspective centrale (voir figure de l'annexe 3 page suivante)
   a) Construction des points **c**, **d** et **e**.
   Puisque le segment **[BM]** est dans un plan frontal, son milieu **C** est représenté au milieu **c** de **[bm]**.
   Le point de fuite principal est le point **F**, intersection de **(mf)** et de la ligne d'horizon (δ).
   Le point **d** est l'intersection des droites **(cF)** et **(bf)**.
   Le point **e** est l'intersection de **(kF)** et de la parallèle à **(bm)** passant par **d**.

b) Compléter la construction.



h est le 4e point du rectangle dont les 3 premiers sommets sont **b**, **c** et **g**.

i est l'intersection de **(hF)** et de la parallèle à **(bg)** passant par **d**.

j est le 4e point du rectangle dont les 3 premiers sommets sont **i**, **d** et **e**.

k est l'intersection de **(jF)** avec la parallèle à **(bg)** passant par **f**.

l est l'intersection de **(gF)** et de la parallèle à **(bm)** passant par **k**.

Exercice 2 (6 points)

La suite U est définie par : $U_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $U_{n+1} = U_n + 2(n+1)$.

1. Montrer que $U_1 = 2$ et que $U_2 = 6$. Calculer U_3.

   On a : $U_1 = U_0 + 2\times 1 = 0 + 2 = 2$

   $U_2 = U_1 + 2\times 2 = 2 + 4 = 6$

   $U_3 = U_2 + 2\times 3 = 6 + 6 = 12$

2. Chacune des 3 propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier les réponses.

   Proposition 1 : « La suite U est arithmétique » : FAUX, car $U_1 - U_0 = 2$ et $U_2 - U_1 = 4$

   Proposition 2 : « Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $U_n = n^2+1$ » : VRAI car $\begin{cases} U_1 = 2 \\ 1^2+1 = 2 \end{cases}$

   Proposition 3 : « Pour toutes les valeurs de n, on a : $U_n = n^2+1$ » : FAUX car $U_0 \neq 1$; $U_2 \neq 5$ …

3. On considère l'algorithme suivant :

   Entrée : N est un entier naturel non nul.
   Initialisation : $P = 0$
   Traitement : Pour K allant de 0 à N :
   Affecter à P la valeur $P + K$
   Afficher P
   Fin de l'algorithme

   Remarques personnelles :

   - *Pourquoi y a-t-il "fin de l'algorithme" et pas "début de l'algorithme" ?*
   - *Pourquoi l'initialisation de la variable P est-elle "P = 0" au lieu de "Affecter 0 à P" ?*

- *Pourquoi la structure itérative ne se termine-t-elle pas par "Fin Pour" ?*

a) Faire fonctionner cet algorithme avec $N = 3$.

Étapes		N	P	K	Affichage de P
Entrée		3			
Initialisation			0		
Traitement	Pour $K = 0$		0	0	
	P prend la valeur $P + K$		0		0
	Pour $K = 1$		0	1	
	P prend la valeur $P + K$		1		1
	Pour $K = 2$		1	2	
	P prend la valeur $P + K$		3		3
	Pour $K = 3$		3	3	
	P prend la valeur $P + K$		6		6

Non, on n'obtient pas les valeurs des quatre premiers termes de la suite U. On obtient 0, 1, 3, 6 au lieu de 0, 2, 6, 12.

b) Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U.
D'après la définition de la suite U, chaque nouveau terme s'obtient en lui ajoutant le double de son indice.
On en déduit l'algorithme modifié :

Entrée : **N est un entier naturel non nul.**
Initialisation : **$P = 0$**
Traitement : **Pour K allant de 0 à N :**
Affecter à P la valeur $P + 2K$ ← modification
Afficher P
Fin de l'algorithme

4. Raisonnement par récurrence
   a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $(k^2 + k) + 2(k+1) = (k+1)^2 + k + 1$
   On a : $(k^2 + k) + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$ d'une part,
   et : $(k+1)^2 + k + 1 = (k^2 + 2k + 1) + k + 1 = k^2 + 3k + 2$ d'autre part.
   Donc les 2 expressions sont bien égales.
   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = n^2 + n$.
   - Pour les premières valeurs de n, cette propriété est vraie :
     $0^2 + 0 = 0 = U_0$; $1^2 + 1 = 2 = U_1$; $2^2 + 2 = 6 = U_2$; $3^2 + 3 = 12 = U_3$.
   - Prenons un entier n pour lequel on a effectivement l'égalité $U_n = n^2 + n$.
     Alors : $U_{n+1} = U_n + 2(n+1)$
     $U_{n+1} = (n^2 + n) + 2(n+1)$ d'après l'hypothèse de récurrence
     $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$ d'après la question 4.*a)*
     Donc la propriété est transmissible d'un entier n à l'entier suivant $n+1$.
   - Donc pour tout entier naturel n, la propriété $U_n = n^2 +$ n est vraie.

Exercice 3 (4 points)

La fonction f est définie sur l'intervalle [1 ; 15] par $f(x) = 2 + 3\ln x$.

1. Calculer $f'(x)$, pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 15].
   On sait que la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
   Donc : $f'(x) = 0 + 3 \times \dfrac{1}{x}$
   Donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{3}{x}}$.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est $f'(1)$.

Or $f'(1) = 3$.

$\boxed{\text{Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe } \mathscr{C} \text{ en son point 1 est 3.}}$

Remarque : certains candidats auront certainement mal lue la question et calculer l'équation de la tangente …

3. Résoudre l'équation $f(x) = 8$.

   Cette équation équivaut successivement à :
   $$2 + 3\ln x = 8$$
   $$3\ln x = 6$$
   $$\ln x = 2$$
   $$x = \mathrm{e}^2$$

   $\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = 8 \text{ a pour unique solution } x = \mathrm{e}^2.}$

4. Parmi les 3 représentations graphiques données, une seule représente la fonction *f*. Préciser laquelle en justifiant :

   - la dérivée de *f* est définie par $f'(x) = \dfrac{3}{x}$ et est donc strictement positive sur [1 ; 15]

     Donc la fonction *f* est croissante sur [1 ; 15].
     <u>On peut donc éliminer la courbe n° 2.</u>
   - l'équation $f(x) = 8$ a pour solution $x = \mathrm{e}^2$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(\mathrm{e}^2 ; 8)$.

     or $2 < \mathrm{e} < 3$ donc $4 < \mathrm{e}^2 < 9$
     <u>On peut donc éliminer la courbe n° 3</u> car son point d'ordonnée 8 a pour abscisse 13 environ.
   - $\boxed{\text{La bonne courbe est donc la courbe n° 1.}}$ (on aurait pu dire directement que c'est la seule courbe qui passe par le point de coordonnées $(\mathrm{e}^2 ; 8)$…)

Exercice 4 (5 points)

1. Justifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 13)

   On sait que 2 nombres sont congrus modulo *n* si et seulement si leur différence est un multiple de *n*.

   On a : $10^3 - (-1) = 1001$

   Or 1001 est un multiple de 13 car $77 \times 13 = 1001$

   $\boxed{\text{Donc } 10^3 \text{ et } (-1) \text{ sont bien congrus modulo 13.}}$

2. *a)* En déduire le reste de la division euclidienne de 10^6 par 13.

   On sait que : $10^6 = (10^3)^2$

   Or on a vu que : $10^3 \equiv -1$ (modulo 13)

   Donc : $(10^3)^2 \equiv (-1)^2$ (modulo 13)

   Donc : $10^6 \equiv 1$ (modulo 13)

   On sait que le reste de la division euclidienne de *a* par *b* est *r* si et seulement si $0 \leqslant r < b$ et $a \equiv r \pmod b$

   $\boxed{\text{Donc le reste de la division euclidienne de } 10^6 \text{ par 13 est 1.}}$

   b) Montrer que $10^9 \equiv -1$ (modulo 13) et que $10^{12} \equiv 1$ (modulo 13).

   On a : $10^9 = 10^3 \times 10^6$

   Donc : $10^9 \equiv (-1) \times 1$ (modulo 13)

   Donc : $\boxed{10^9 \equiv -1 \quad \text{(modulo 13)}}$

   De même : $10^{12} = (10^6)^2$

   Donc : $10^{12} \equiv (1)^2$ (modulo 13)

   Donc : $\boxed{10^{12} \equiv 1 \quad \text{(modulo 13)}}$

3. Soit l'entier $N = 5\,292\,729\,824\,628$.

   a) En remarquant que $N = 5 \times 10^{12} + 292 \times 10^9 + 729 \times 10^6 + 824 \times 10^3 + 628$, démontrer que $N \equiv 246$ (modulo 13).

   On sait que $10^{12} \equiv 1$ (modulo 13), que $10^9 \equiv -1$ (modulo 13), que $10^6 \equiv 1$ (modulo 13) et que $10^3 \equiv (-1)$ (modulo 13)

   Donc : $N \equiv 5 \times 1 + 292 \times (-1) + 729 \times 1 + 824 \times (-1) + 628$ (modulo 13)

   Donc : $\boxed{N \equiv 246 \quad \text{(modulo 13)}}$

   b) *N* est-il divisible par 13 ?

   On a : $246 \equiv 12$ (modulo 13) car $246 = 13 \times 18 + 12$

   donc : $N \equiv 12$ (modulo 13)

   $\boxed{\text{donc } N \text{ n'est pas divisible par 13}}$.