BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Dans chaque programme de construction proposé par un grand constructeur immobilier, les acquéreurs doivent choisir entre la pose de moquette, de carrelage ou de sol plastifié pour revêtir le sol du salon. Pour le revêtement des murs du salon, ils ont le choix entre peinture ou papier peint.

Le recueil des choix des acquéreurs par l'entreprise donne les résultats suivants :

- 20% ont choisi la moquette ;
- 50% ont choisi le carrelage ;
- les autres acquéreurs ont choisi la pose de sol plastifié.

Parmi les acquéreurs ayant choisi la moquette, 46% choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
Parmi les acquéreurs ayant choisi le carrelage, 52% choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
42,7% des acquéreurs ont choisi le papier peint pour le revêtement des murs.

On interroge au hasard un acquéreur de logement construit par cette entreprise.
On considère les événements suivants :
M l'événement : « l'acquéreur a choisi la pose de moquette » ;
C l'événement : « l'acquéreur a choisi la pose de carrelage » ;
S l'événement : « l'acquéreur a choisi la pose de sol plastifié » ;
P l'événement : « l'acquéreur a choisi la pose de papier peint » ;
$\overline{P}$ l'événement contraire de P, correspondant à : « l'acquéreur a choisi la peinture ».

Les résultats seront donnés sous forme décimale, et arrondis au millième.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

2.
- **a.** Décrire l'événement $M \cap P$.
- **b.** Calculer la probabilité $p(M \cap P)$.

3.
- **a.** Montrer que la probabilité que l'acquéreur ait choisi la pose de sol plastifié et de papier peint est égale à 0,075.
- **b.** L'acquéreur a choisi le sol plastifié. Calculer la probabilité qu'il ait choisi le papier peint.

4. On interroge au hasard et de façon indépendante trois acquéreurs parmi tous les clients du constructeur.
- **a.** Calculer la probabilité, notée p_1, qu'au moins un des trois acquéreurs ait choisi le papier peint.
- **b.** Calculer la probabilité, notée p_2, qu'exactement deux des trois acquéreurs aient choisi le papier peint.

Exercice 2 *(5 points)*

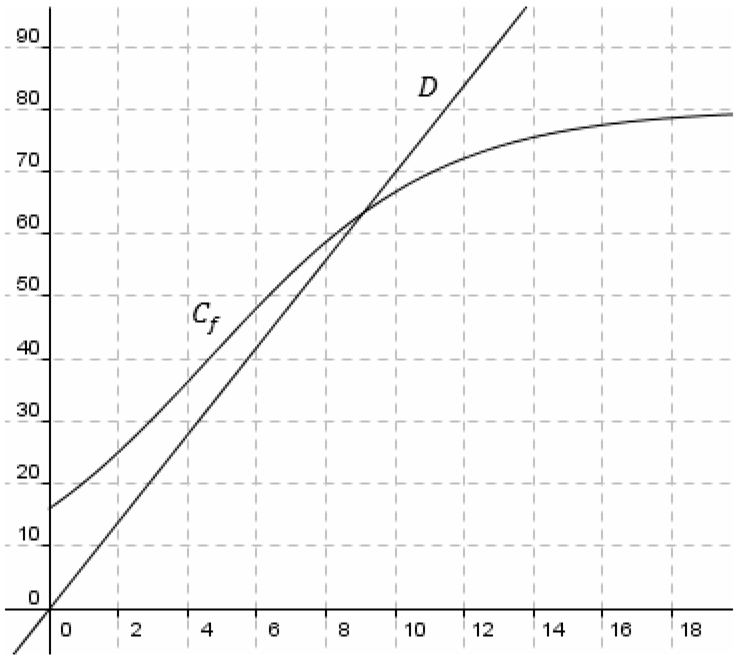
Commun à tous les candidats)

PARTIE A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{80}{1+4\mathrm{e}^{-0,3x}}$$

Dans un repère orthogonal, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = 7x$.
On admet que la courbe C_f et la droite D se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne : $x_0 \approx 9{,}02$.



1. Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième de $f(20)$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
3.
   a. Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire que la courbe C_f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et en donner une équation.

   b. Montrer que pour tout x appartenant à $[0\ ;+\infty[$, on a $f(x) < 80$. En déduire la position relative de la courbe C_f par rapport à la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
4. À l'aide du graphique, déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

PARTIE B : Interprétation économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On utilisera les résultats de la partie A.

Une entreprise peut produire chaque jour au maximum 2 000 thermomètres de bain pour bébé.

On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à l'intervalle [0 ; 20].

On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaines d'euros, est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.

1. Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.
2. Le coût total de production des thermomètres peut-il atteindre 8 100 € par jour ? Justifier.
3. Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.

   Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Justifier.

Exercice 3 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.

En 2007, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007 + n)$.
On a donc $r_0 = 40\,000$.

1.

a. Calculer r_1 et r_2.

b. Justifier que pour tout entier n naturel on a $r_{n+1} = 0{,}95r_n + 200$.

2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4\,000$.

a. Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer s_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $r_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000$.

c. La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.

d. Déterminer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.

e. Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.

3. *Dans* cette *question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?

EXERCICE 4 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**.
On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur **R**.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On donne de plus : $f(-2) = 0$ et $f(5) = 0$ et $f(10) = 3$.

À l'aide des informations fournies ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Dresser sans justification le tableau donnant le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Les réponses aux questions suivantes devront être justifiées.

2.

a. La courbe (C) admet-elle une asymptote horizontale ?
Si oui, préciser une équation de cette droite.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[3\ ;\ 10]$.

c. On appelle F une primitive de la fonction f sur **R**.
Déterminer les variations de la fonction F sur **R**.

3. On note g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\ \cup\ ]\ 5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Expliquer pourquoi la fonction g n'est pas définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} g(x)$.

c. Préciser le sens de variation de la fonction g sur son ensemble de définition.