BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHEMATIQUES série L

Épreuve de spécialité
Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 3
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.
TROIS ANNEXES (pages 6, 7 et 8) SONT A RENDRE
IMPÉRATIVEMENT AVEC LA COPIE.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet.
Le sujet ne nécessite pas de papier millimétré.
L'usage d'un dictionnaire est interdit.

Exercice 1 (4 points)

Chaque résultat sera exprimé sous forme d'entier ou de fraction irréductible. Un arbre est donné en annexe 1. Il est à compléter et à rendre avec la copie.

On utilise dans cet exercice un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes.

Chacun de ces deux jeux de cartes contient un seul valet de trèfle.

On lance un dé non truqué à 6 faces. Les faces de ce dé sont numérotées par les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

- Si le résultat est impair, on tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
- Si le résultat est 2 ou 4, on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si le résultat est 6, on tire (en regardant les cartes) systématiquement le valet de trèfle du jeu de 32 cartes.

On note :

A : l'événement « Le résultat affiché par le dé est impair ».

B : l'événement « Le résultat affiché par le dé est 2 ou 4 ».

C : l'événement « Le résultat affiché par le dé est 6 ».

V : l'événement « La carte tirée est le valet de trèfle ».

$\overline{\mathrm{V}}$: l'événement contraire de V.

1. Déterminer les probabilités des événements A, B et C.
2. Compléter par les probabilités qui conviennent, l'arbre donné en **Annexe 1**.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement V est égale à $\dfrac{233}{1248}$.
4. On a tiré le valet de trèfle. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu 6 lors du lancer du dé ?

Exercice 2 (6 points)

Un repère est donné en annexe. La figure est à compléter et à rendre avec la copie.

On cherche une fonction dont l'allure de la courbe représentative dans un repère orthonormé prend la forme d'une rampe d'escalier.

Soit F une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ et C sa courbe représentative dans un repère.

On souhaite que la fonction F remplisse les cinq conditions suivantes :

(1) Le point D de coordonnées (0 ; 4) est un point de la courbe C.

(2) La tangente à la courbe C au point D passe par le point E de coordonnées $\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$.

(3) F est décroissante sur l'intervalle $[0\,;3]$.

(4) C passe par le point B de coordonnées (3 ; 0).

(5) La tangente (T) à C en son point d'abscisse 3 est l'axe des abscisses.

1. a) Tracer la droite (DE) sur le graphique donné en **Annexe 2**.

   b) Démontrer que la droite (DE) a pour équation $y = -\frac{3}{4}x + 4$

   c) Sur le même graphique de l'annexe 2, tracer le dessin d'une courbe représentative d'une fonction F vérifiant les cinq conditions imposées.

2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^{x}$

   a) Calculer $f(0)$. La condition (1) est-elle vérifiée ?

   b) Démontrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie par $f'(x) = \frac{1}{4}(x-3)\mathrm{e}^{x}$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;3]$.

   c) Calculer $f'(0)$. La condition (2) est-elle vérifiée ? Justifier précisément la réponse.

   d) La condition (3) est-elle vérifiée ? Justifier précisément la réponse.

   e) La courbe représentative de f correspond-elle au problème posé, autrement dit les conditions (1) à (5) sont-elles vérifiées ? Justifier précisément la réponse.

Exercice 3 (5 points)

Dans tout cet exercice, les nombres s'écrivent en base 10.

1. Le nombre n est un entier naturel. Que signifie « n est congru à 3 modulo 10 » ?
2. Démontrer que 347 est congru à 7 modulo 10.

On admet dans la suite de cet exercice que tout entier naturel n est congru à son chiffre des unités modulo 10.

3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n un entier naturel.
Initialisation :	Donner à u la valeur initiale n.
Traitement :	Tant que $u \geq 10$ Affecter à u la valeur $u - 10$.
Sortie :	Afficher u.

   a) Quelle est la valeur affichée en sortie par cet algorithme pour $n = 11$?

   b) Quelle est la valeur affichée en sortie par cet algorithme pour $n = 35$?

   c) Pour un entier naturel n quelconque, quel est le nombre entier naturel affiché en sortie par cet algorithme ?

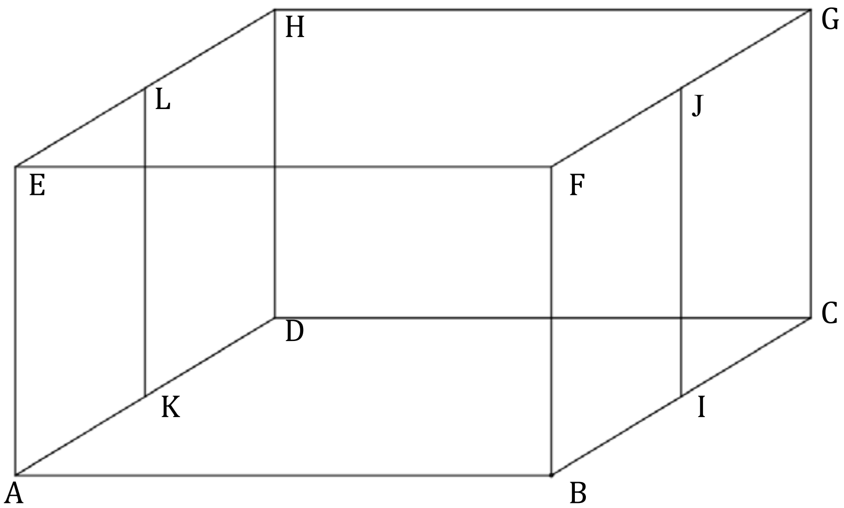
4. ***Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

   a) Déterminer le chiffre des unités de 11^{2011}.

   b) Déterminer le chiffre des unités de 9^{2011}.

Exercice 4 (5 points)

Un dessin est donné en annexe. Il est à compléter et à rendre avec la copie. Les traits de constructions devront apparaître clairement.



On considère une maquette de décor de théâtre de base rectangulaire ABCD posée sur un sol horizontal. Le point I est le milieu du segment $[BC]$ et le point K celui du segment $[AD]$.

Six poteaux de même longueur $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$, $[IJ]$ et $[KL]$ soutiennent le toit rectangulaire EFGH de cette maquette. Ils sont verticaux au sol.

Les longueurs AB et EF sont égales, ainsi que les longueurs BC et FG.

La figure ci-dessus représente cette maquette en perspective parallèle.

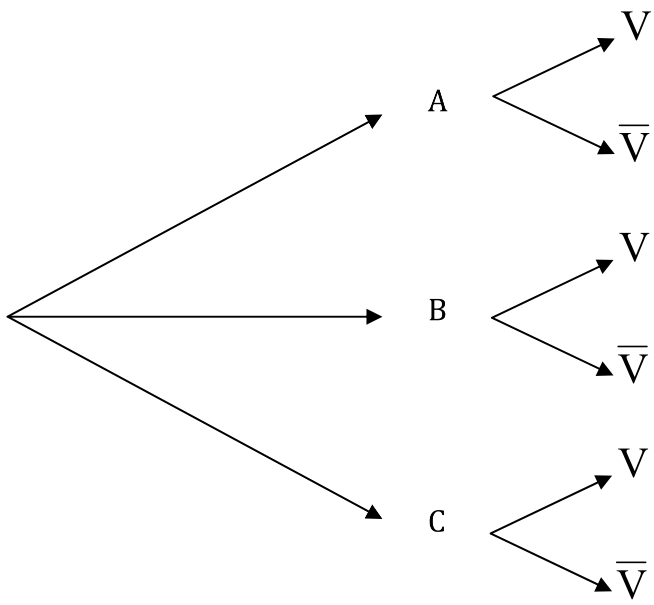
Les images des points A, B, C… dans la représentation en perspective centrale seront notées avec des lettres minuscules : a, b, c…

Sur la figure en annexe 3 sont tracés les segments $[ab]$ et $[ad]$ représentant en perspective centrale les côtés $[AB]$ et $[AD]$ de la maquette ainsi que la ligne d'horizon Δ. La droite (ab) est parallèle à la ligne d'horizon. La face ABFE se trouve dans un plan frontal.

1. Justifier que les droites (ad) et (bc) ont le même point de fuite *w*. Placer *w* sur la figure de l'**<u>Annexe 3</u>**.
2. Placer le point c représentant le point C.
3. On désigne par O le centre du rectangle ABCD. Il s'agit du point où devra se trouver l'acteur pour être placé au centre de la scène. Construire le centre o image du point O.
4. Placer les points k et i représentant respectivement K et I.
5. Sachant que la longueur des poteaux est la moitié de la longueur AB, représenter les six poteaux dans cette perspective centrale.
6. Finir la représentation de la maquette.

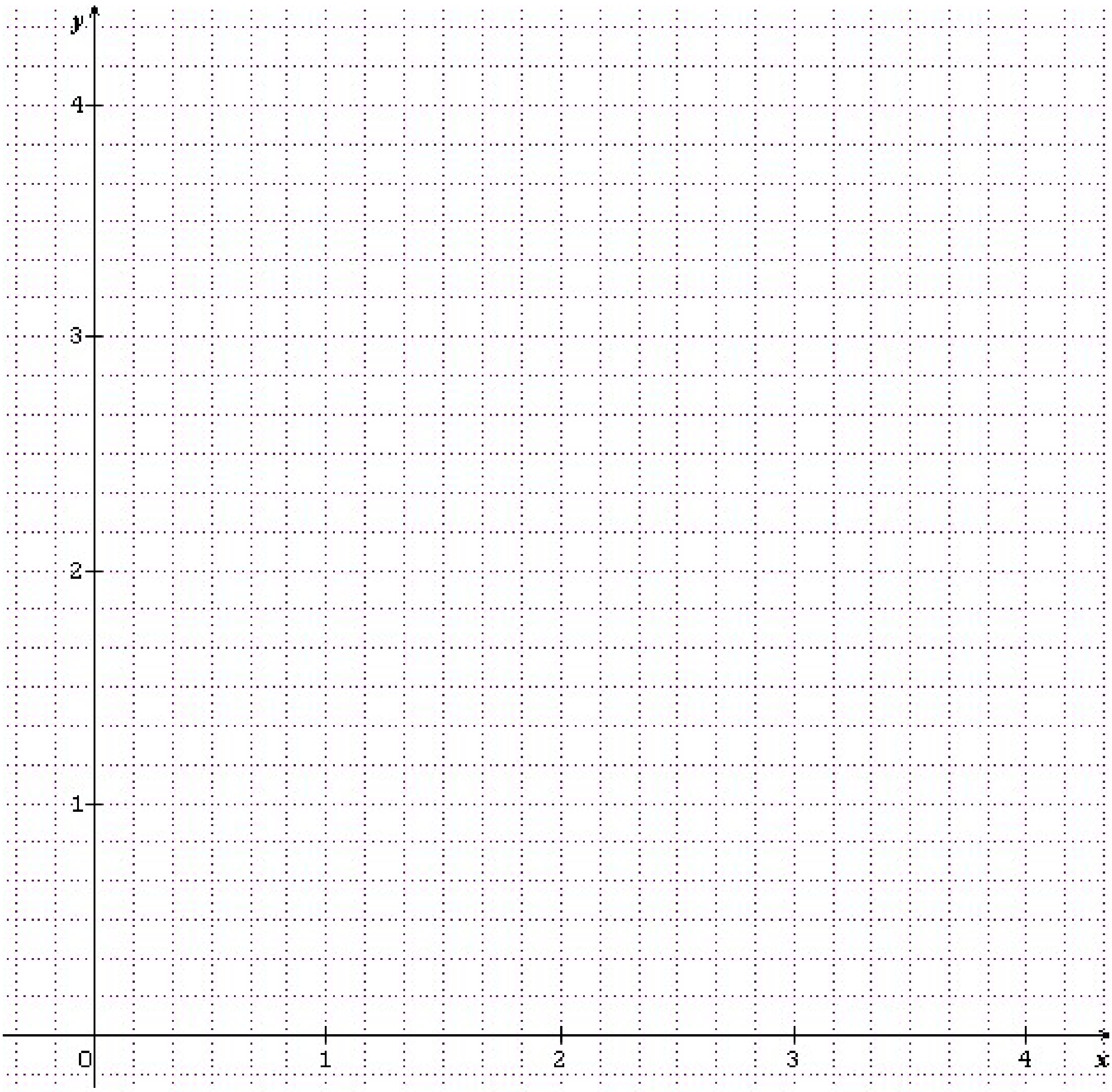
Annexe 1 – A rendre impérativement avec la copie

Exercice 1



Annexe 2 – A rendre impérativement avec la copie

Exercice 2



Annexe 3 – A rendre impérativement avec la copie

Exercice 4