STG - Polynésie juin 2012 Correction

Exercice 1 **4 points**

1. L'équation $\ln(2x + 3) = 0$ admet comme solution dans l'intervalle **Erreur !** :

a. $\cancel{-\frac{3}{2}}$ b. -1 c. $\cancel{\ln(3)}$ d. $\cancel{-\frac{2}{3}}$

Car $\ln(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x + 3) = \ln(1) \Leftrightarrow 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$

2. Un capital de 500 € est placé sur un compte à intérêts composés avec un taux annuel de 3%.
Le montant du compte dépassera le double du montant initial pour la 1re fois au bout de :
a. 24 années b. ~~6 années~~ c. ~~34 années~~ d. ~~12 années~~

Car le capital après un placement de n années vaut $500 \times 1{,}03^n$. Celui-ci doit être égal à 2×500. On résout donc $1{,}03^n = 2$.

3. Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 3$, alors u_{50} vaut :
a. ~~151~~ b. 150 c. $\cancel{50^3}$ d. ~~350~~

Car le terme général d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$ donc $u_{50} = 0 + 50 \times 3 = 150$

4. Soit une suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $n > 1$, $u_{n+1} = 2u_n - 2$.
La suite (u_n) est une suite :
a. ~~constante~~ b. ~~arithmétique~~ c. ~~géométrique~~ d. ni arithmétique, ni géométrique

Car $u_1 = 2 - 2 = 0$ $u_2 = -2$, $u_1 \neq u_0$ donc non constante, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ non arithmétique, $u_1 = 0$ elle ne peut être géométrique car tous les termes suivants de la suite seraient alors nuls.

Exercice 2 **5 points**

Partie 1

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite, (D), d'ajustement de y en x de la série $(xi ; yi)$ obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = -4{,}62x + 298{,}17$.

2. a. Voir annexe
b. En 2013, $x = 14$, remplaçons x par sa valeur dans l'équation de la droite $y = -4{,}6 \times 14 + 298 = 233{,}6$.
Avec ce modèle, le nombre de mariages que l'on peut prévoir en France métropolitaine pour l'année 2013 est de 233,6 milliers.

Partie 2

1. La ligne 4 du tableau précédent donne les taux d'évolution annuels du nombre de mariages célébrés. Une formule entrée dans la cellule C4, puis copiée sur la plage C4 : K4, est :
« =(C3-B3)/B3 » ou « =(C$3-B$3)/B$3 » ou « =C3/B3-1 » ou « =C$3/B$3-1 »

2. a. Si l'on appelle T le taux global d'évolution, $T = \dfrac{245{,}2 - 276{,}3}{276{,}3} \approx -0{,}1126$.
Le taux global d'évolution entre 2005 et 2009 est d'environ −11,3%.

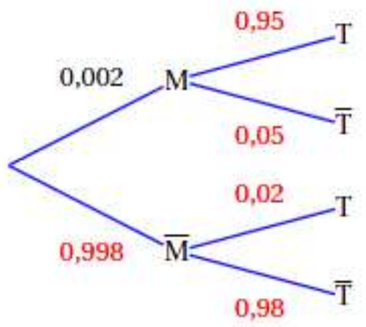
b. Entre 2005 et 2009, le nombre de mariages a subi 4 évolutions. En 2009, le nombre de mariages de 2005

a été multiplié par 1 + T d'une part ou par $(1 + t_m)^4$ d'autre part, t_m désignant le taux moyen d'évolution.
Donc $(1 + t_m)^4 = 0{,}887$ d'où $t_m = (0{,}887)^{1/4} - 1 \approx -0{,}02953$
Le taux d'évolution annuel moyen du nombre de mariages célébrés en France entre 2005 et 2009 à 0,1% près est 3%.

<u>Exercice 3</u> **5 points**

1. La probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est définie par $p_M(T)$.
Puisque lorsqu'un individu est sain, le test est positif dans 2% des cas, nous avons donc $p_{\overline{M}}(T) = 0{,}02$

2. L'arbre de probabilités lié à la situation est le suivant :



3. Calculons la probabilité de l'événement « l'individu est atteint par la maladie et le test est positif » noté M ∩ T.
$p(M \cap T) = 0{,}002 \times 0{,}95 = 0{,}0019$

4. $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0{,}0019 + 0{,}998 \times 0{,}02 = 0{,}0019 + 0{,}01996 = 0{,}02186$
D'après la formule de probabilité totale car M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
Par conséquent, elle est environ égale à 0,021 9.

5. $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}0019}{0{,}0219} \approx 0{,}0868$

6. Si le test est positif, la probabilité que l'individu soit malade est 0,086 8, par conséquent le test n'est pas fiable.

<u>Exercice 4</u> **6 points**

1. $f(0) = 400e^0 = 400$. Ce nombre pour l'entreprise représente les coûts fixes.
Chaque objet est vendu 15 € et l'on suppose que tous les objets produits sont vendus.

2. a. 50 × 15 = 750 ; la recette est alors de 750 €.
b. La recette, en euros, générée par la vente de x objets est $15 \times x$. Par conséquent $R(x) = 15x$.

3. On appelle intervalle de rentabilité l'intervalle des quantités d'objets vendus pour lesquelles l'entreprise réalise un profit.
L'intervalle de rentabilité est l'intervalle pour lequel la courbe des recettes est « au-dessus » de la courbe des coûts. Avec la précision du graphique, nous lisons [40 ; 202]

4. a. $B(x) = R(x) - f(x) = 15x - 400e^{0{,}01x}$.

b. On admet que la fonction B est dérivable sur l'intervalle [0 ; 220] et l'on note B′ sa fonction dérivée.
$B'(x) = 151 - 400 \times (0{,}01e^{0{,}01x}) = 15 - 4e^{0{,}01x}$.

5. Puisque la fonction B admet un maximum en α, il est tel que $B'(\alpha) = 0$.

$15 - 4e^{0{,}01x} = 0 \iff e^{0{,}01x} = \frac{15}{4} \iff \ln e^{0{,}01x} = \ln \frac{15}{4} \iff 0{,}01x = \ln 15 - \ln 4 \iff x = 100(\ln 15 - 2\ln 2)$

Une valeur approchée de α à 0,1 près est 132,2.
Le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer est nécessairement un nombre entier.
Or $B(132) \approx 482{,}63$ $B(133) \approx 482{,}58$
L'entreprise devra fabriquer 132 objets pour obtenir un bénéfice maximal.

ANNEXE
À rendre avec la copie
EXERCICE 2