Baccalauréat ES La Réunion juin 2003

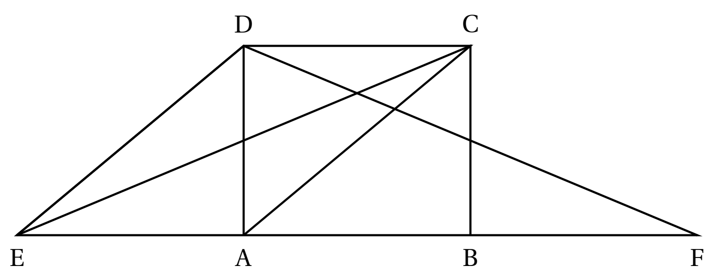
EXERCICE 1
Commun à tous les candidats

Les membres d'un club sportif se présentent à l'accueil soit pour jouer au golf soit pout profiter de la salle de musculation (une activité excluant l'autre).
La probabilité qu'il ne pleuve pas, en automne, dans cette région est égale à 0,8. En automne un membre se présente.
S'il pleut, il joue au golf dans 30 % des cas.
S'il ne pleut pas, il s'enferme dans la salle de musculation dans 20 % des cas.
On note B l'évènement « il pleut »,
G l'évènement « le membre du club joue au golf ».

1. **a.** Traduire la situation ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré.
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,7.
   c. Déterminer la probabilité qu'il pleuve sachant que le membre du club se présentant à l'accueil ne joue pas au golf.
2. Trois membres se présentent successivement et indépendamment le uns des autres. On suppose que, pour chacun des trois, la probabilité qu'il joue au golf est 0,7.
   On s'intéresse au nombre de golfeurs parmi ces trois personnes.
   a. En utilisant un arbre pondéré, montrer que la probabilité p_2 que deux membres exactement jouent au golf est de $0,441$.
   b. Établir la loi de probabilité associée à cette situation.
   c. Déterminer l'espérance mathématique et interpréter le résultat obtenu.
   d. Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois membres ne joue pas au golf.

EXERCICE 2

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

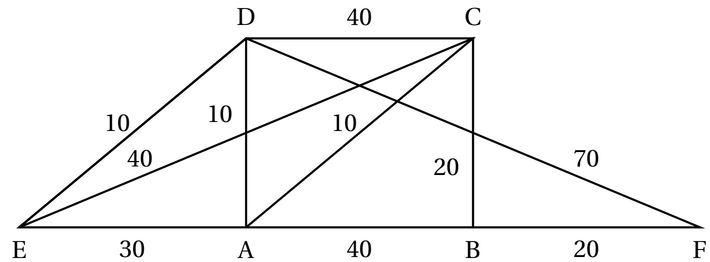
   b. Le graphe $\mathscr{G}$ est connexe. Pourquoi ?
2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.
   a. Démontrer que son souhait est réalisable.
   b. Donner un exemple d'un tel parcours.
3. Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.

a. Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie $n \geqslant 4$.

b. Expliquer pourquoi $n \leqslant 5$.

c. Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur E Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.



(AB = 40 ; AC = 10 ; AD = 10 ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF =20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)

Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

Problème

Partie A - Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Soit f' la fonction dérivée de f.

a. Vérifier que, pour tout x réel, on a $f'(x) = 15(x - 1,4)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Établir le tableau de variations de f.

3. Représenter ta portion de la courbe $(\mathscr{C})$ pour x compris entre 0 et 7.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 4,5$, admet, entre 0 et 7, deux solutions α et β (on notera α la plus petite des deux solutions).

b. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-2} près, en présentant brièvement la méthode utilisée.

c. Donner la valeur arrondie de β à 10^{-2} près.

d. Quel est l'ensemble des solutions, dans l'intervalle $[0 ; 7]$, de l'inéquation $f(x) \leqslant 4,5$?

Partie B - Application

La fonction f est la fonction coût marginal $\mathrm{C_M}$ de fabrication d'un produit. x est exprimé en tonnes (x compris entre 0 et 7), et le coût est exprimé en milliers d'euros.

1. **a.** Pour quelle production le coût marginal est-il minimum et quel est ce prix ?

b. Pour quelles productions le coût marginal est-il inférieur à 4,5 ? (on donnera chacune des bornes de l'intervalle à 10^{-2} près)

2. La fonction coût total C_T est une primitive de la fonction coût marginal.

a. Soit g et h les fonctions définies sur $[0\,;\,7]$ par :

$$g(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}.$$

h' étant la fonction dérivée de h, calculer $h'(x)$ et déterminer a et b pour que h soit une primitive de g.

b. En déduire que $C_T(x) = (15x + 9)\mathrm{e}^{-x} + 6x + k$.

c. Déterminer k sachant que les frais fixes s'élèvent à 2 000 euros (c'est-àdire que $C_T(0) = 2$).