BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, et une page annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.

Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
rang i du jour	1	2	3	4	5
nombre de retraits	37	55	45	53	60

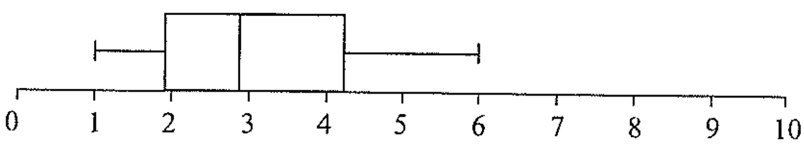
On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ».
On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d^2_{obs} = \sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.

2. Calculer alors la valeur de $1000\ d^2_{obs}$ (la multiplication par 1000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).

3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1000\ d^2_{obs}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2000 valeurs de $1000\ d^2_{obs}$.
   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



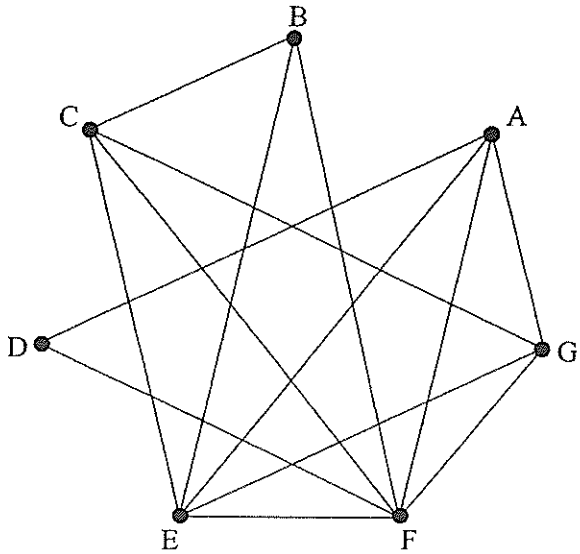
   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.

4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.
A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle.
Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).

2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?

3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
   En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.

4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.

5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ 50]$ par $g(x) = (x-15)^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\ ;\ 50]$.

   a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

   b. Etudier le signe de g' sur $[0\ ;\ 50]$.

   c. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ 50]$.

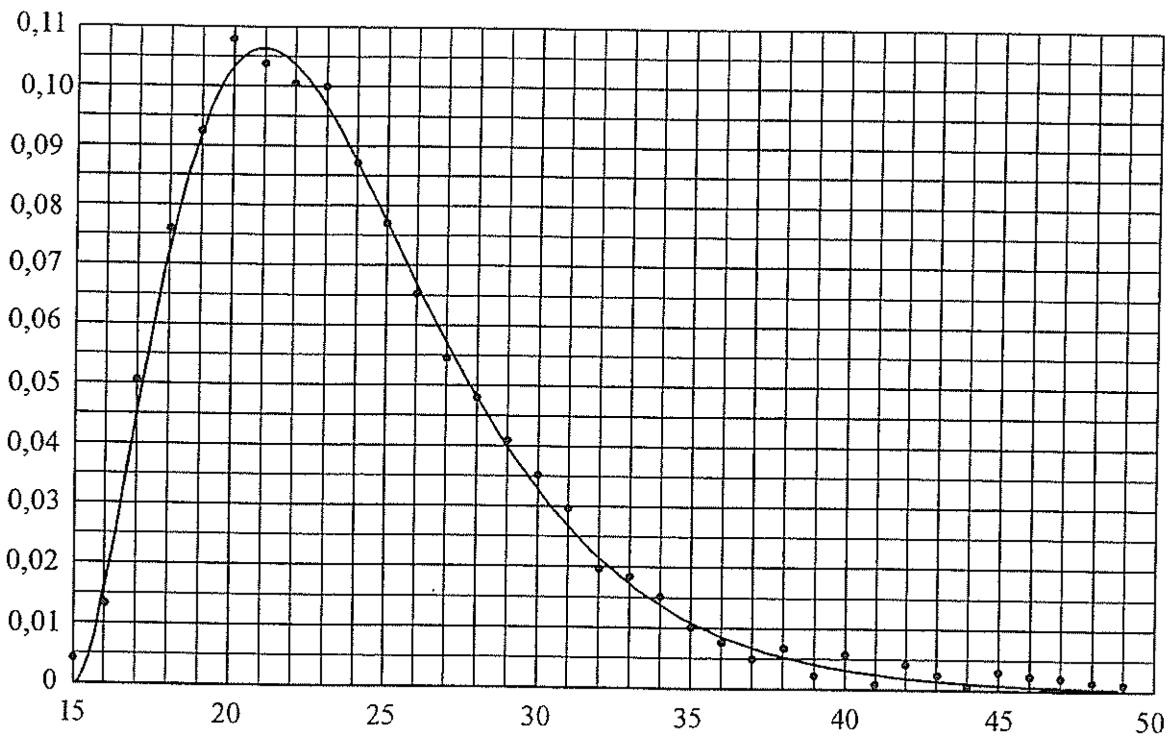
2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\ ;\ 50]$ par $\mathrm{G}(x) = 3(-x^2 + 24x - 153)\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[0\ ;\ 50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15\ ;\ 49]$ par $f(x) = \dfrac{107\ \mathrm{e}^7}{36000} g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\ ;\ 49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la question A. 2.).
On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1}.

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k, où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathcal{R}$.

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la partie B afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).
2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
   Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
   Le modèle choisi paraît-il adapté ?

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 \,;\, 49]$.
   Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
   Justifier votre réponse.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

Série : **ES**

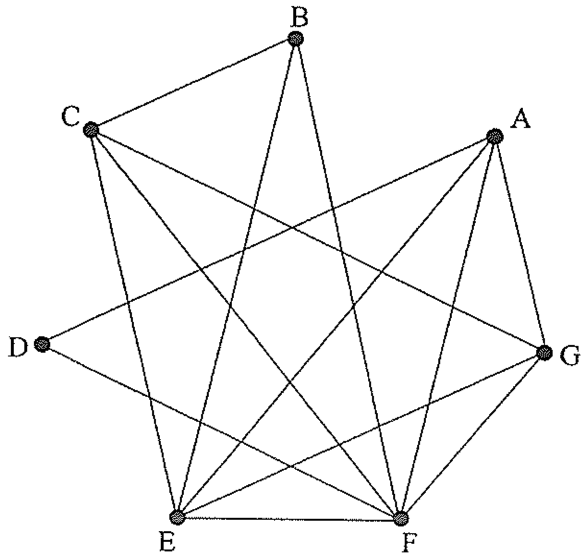
PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

Graphe Γ



BACCALAURÉAT, SÉRIE ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart-type

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\overline{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{V}(x)}$$

Dans le cas d'une pondération, si $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\, {x_i}^2 - (\overline{x})^2$$

Droites de régression

$$\sigma_{x\,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(x_i\, y_i) - \overline{x}\;\overline{y}$$

$y = a\,x + b$, où $a = \dfrac{\sigma_{x\,y}}{\mathrm{V}(x)}$

$x = a'\,y + b'$ où $a' = \dfrac{\sigma_{x\,y}}{\mathrm{V}(y)}$

II. PROBABILITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général :

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad$ $P(\Omega) = 1$ $\qquad$ $P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d' éléments de } A}{\text{Nombre d' éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \bigcap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \bigcap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \bigcap B_1) + P(A \bigcap B_2) + \ldots + P(A \bigcap B_n)$

Une loi de probabilité étant donnée, on définit :

l'*espérance mathématique* : $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$

la *variance* : $\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - \mathrm{E})^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, {x_i}^2 - \mathrm{E}^2$

l'*écart-type* : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}$

III. ALGÈBRE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b et c trois nombres réels $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.
L'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $x_1 = -\dfrac{b}{2\,a}$
- lorsque $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta > 0$, $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)^2$

C. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n + a \qquad u_n = u_0 + n\,a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = b\,u_n \qquad u_n = u_0\,b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

IV. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonction exponentielle*

   $e^0 = 1$

   Pour tous réels a et b,

   $e^{a+b} = e^a\,e^b$

   $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

   $(e^a)^b = e^{a\,b}$

2. *Fonction logarithme*

   $\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$

   Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

   $\ln a\,b = \ln a + \ln b$

   $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$, $y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables.

Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u' + v'$

$(k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$

$(e^u)' = e^u\,u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

D. ACCROISSEMENTS

Pour une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$) :

L'*accroissement moyen* de f sur $[a, b]$ est $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Si $f(a) \neq 0$, l'*accroissement relatif* de f sur $[a, b]$ est $\dfrac{f(b) - f(a)}{f(a)}$.

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

V. GÉOMÉTRIE (ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ)

En repère orthonormal :

Si $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ alors $MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$.

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées (a, b, c) et si $\vec{v}$ a pour coordonnées (a', b', c') alors

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$.