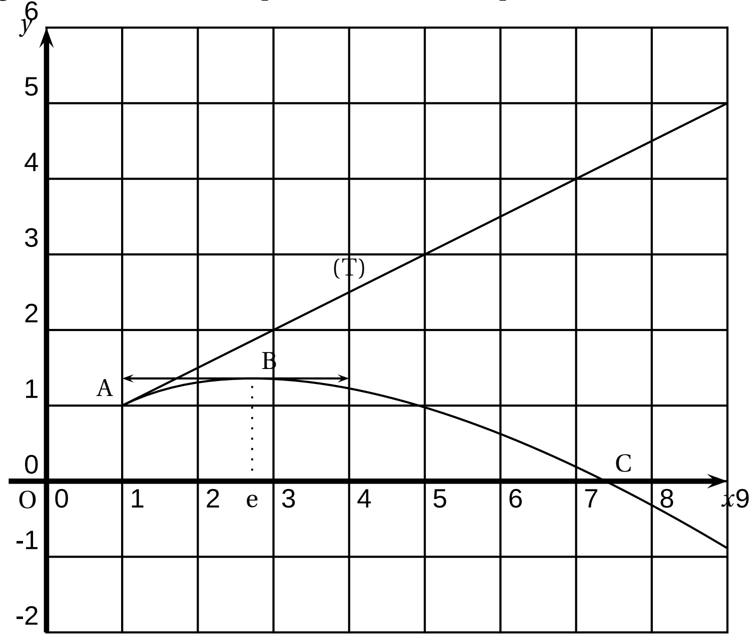
Baccalauréat L Antilles-Guyane juin 2003

Exercice 1 **7 points**

La courbe (Γ) ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.
La droite (T) est tangente à la courbe (Γ) au point A(1 ; 1).
La tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse e est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique
   a. Donner le coefficient directeur de la droite (T)
   b. Donner $f(1)$ et $f'(\text{e})$
   c. Déterminer les réels x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$ qui vérifient $f'(x) \leqslant 0$.
   d. En traçant le plus précisément possible la tangente à la courbe (Γ) au point C, lire le coefficient directeur de cette tangente.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{2}[2 - \ln(x)].$$

   a. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e
   b. Déterminer l'abscisse du point C, intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.
3. La dérivée f' de f est définie sur $[1~;~+\infty[$ par $f'(x) = k\ln\left(\frac{\text{e}}{x}\right)$ où k est un nombre réel donné.
   a. Vérifier le résultat donné pour $f'(\text{e})$ à la question 1.
   b. Déterminer le réel k sachant que $f'\left(\text{e}^2\right) = -\frac{1}{2}$.
   c. Donner une équation de la tangente à la courbe (Γ) au point C.
   d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (T) et de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

EXERCICE 2 **7 points**

Le numéro I.N.S.E.E est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme et 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre d'état-civil ;
- les deux chiffres suivants désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
    - soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche ;
    - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97 ;
    - alors $K = 97 - r$.

Les 13 premiers chiffres (sans la clé) du numéro I.N.S.E.E de Sophie sont 2 85 07 86 183 048.
On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1. Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.
2. **a.** Déterminer les deux entiers a et b tels que $A = a \times 10^6 + b$ avec $0 \leqslant b < 10^6$.

   b. En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97, montrer que $10^6 \equiv 27 \quad (\text{modulo} \quad 97)$.

   c. En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.
3. Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E de Sophie.
4. Sophie, à qui l'on demande les treize premiers de son numéro I.N.S.E.E, inverse les deux derniers chiffre et répond 2 85 07 86 183 084 à la place de 2 85 07 86 183 048.

   On note B la réponse de Sophie.

   a. Calculer la différence $B - A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.

   b. L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

EXERCICE 3 **6 points**

On donnera les résultats sous forme irréductible.

On dispose d'un damier dont chacune des neuf cases est marquée d'un des trois nombres 1, 2 et 3 selon le schéma ci-contre :

1	2	3
2	3	1
3	1	2

On répartit au hasard trois pions indiscernables sur le damier (un pion par case) et on appelle S la somme des trois nombres marqués sur les trois cases occupés par les pions.

Les répartitions sont toutes équiprobables.

1. Écrire le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne et en déduire $\binom{9}{3}$.

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					

2. On considère les évènements E, F et G suivants :
E : « La somme S est égale à 3 » ;
F : « La somme S est égale à 9 » ;
G : « La somme S est égale à 6 ».

a. Déterminer les probabilités $p(\text{E})$ et $p(\text{F})$ des évènements E et F.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{1}{3}$.

3. Soit A l'évènement : « La somme S est divisible par 3 » et B l'évènement : « Les trois pions sont alignés en colonne, en ligne ou en diagonale ».

a. Déterminer les probabilités $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$ des évènements A et B.

b. Calculer la probabilité $p_{\text{A}}(\text{B})$ de l'évènement B sachant que A est réalisé.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 4 — 6 points

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En l'an 2000, elle était de 8000 habitants.

1. On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0 = 8\,000$.

a. Calculer les termes u_1 et u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

c. Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.

d. Déterminer en quelle année la population aura doublé.

2. On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

a. Calculer les termes v_1 et v_2.

b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

c. Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n. Vérifier, pour le cas particulier $n = 6$, le résultat obtenu en **1. c.**