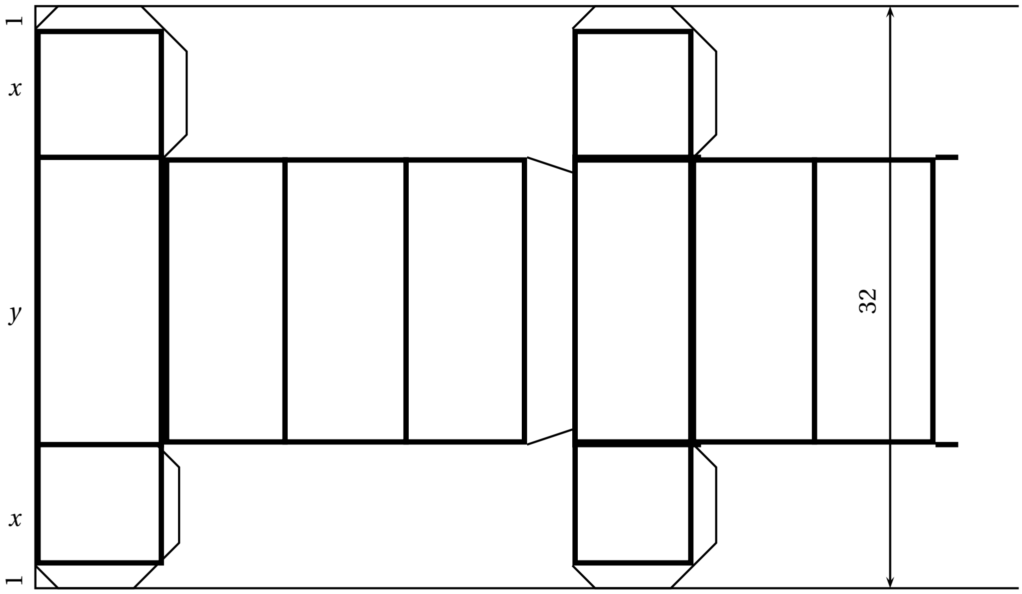
Baccalauréat série L France juin 2003

Durée de l'épreuve : 3 heures
Le candidat doit traiter TROIS exercices : le 1, le 2 et le 3 ou le 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de 32 cm de large dans laquelle il trace et découpe les patrons des boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de x cm de côté, munies de deux languettes de 1 cm de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton. On a donc $y = 30 - 2x$.

   a. Expliquer pourquoi on a nécessairement : $0 < x < 15$.

   b. Démontrer que le volume V en cm^3, de la boîte est donné par la formule

$$V = 30x^2 - 2x^3.$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $f(x) = 30x^2 - 2x^3$.

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

   b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur cet intervalle.

3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

x	1	2	4	6	8	10	12	14	15
$f(x)$									

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1 cm pour 100 cm^3 en ordonnées.

4. **a.** Pour quelle valeur de x, le volume V est-il maximum ? Quelle est alors la valeur de ce volume ? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas-là ?

b. Le fabricant veut que la boîte obtenue ait un volume de 500 cm^3 et que x soit inférieur à 10.

Déterminer, à l'aide du graphique, la valeur de x qu'il doit choisir.

Vérifier par le calcul puis calculer la valeur de y correspondante.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE — **6 points**

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

Partie A

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$;
Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après ;
Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles , k entier naturel.
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une suite géométrique de raison $0,9876$
2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k.
3. Quelle est la limite de la suite (N_k) ? Justifier.

Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la terre est constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la **partie A**.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du carbone 14 initial. Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.
2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1 % du carbone 14 initial. En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

EXERCICE 3 AU CHOIX — **7 points**

Toutes les constructions demandées seront effectuées sur la feuille annexe. On laissera apparents les traits de construction
Le segment [AB] a pour longueur l'unité.

1. Construire, à la règle et au compas :

a. le milieu I du segment [AB],

b. la perpendiculaire $\mathscr{D}$ à la droite (AB) passant par B.

2. **a.** Construire un point C de la droite $\mathscr{D}$ tel que BC = BI.

b. Calculer AC.

3. **a.** Construire les points D et M suivants :
   - D est le point d'intersection du segment [AC] avec le cercle de centre C passant par B.
   - M est le point d'intersection du segment [AB] avec le cercle de centre A passant par D.

   b. Calculer AD et vérifier que $\text{AM}^2 = \text{AB} \times \text{MB}$.

   c. Justifier que : $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est appelé nombre d'or et noté Φ.

   d. Déduire des questions précédentes que $\dfrac{\text{AB}}{\text{AM}} = \Phi$ puis que $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \Phi$.

4. On rappelle qu'un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est égal à Φ.
   En utilisant les questions précédentes, construire, à la règle et au compas, des points E et F tels que ABEF soit un rectangle d'or. Expliquer votre démarche.

EXERCICE 4 AU CHOIX **7 points**

Partie A

1. Déterminer les 20 diviseurs positifs de 240.
2. Dans le tableau ci-dessous, parmi ces 20 entiers rangés dans l'ordre croissant, on a coché les multiples de 10.

diviseurs de 240								10				20		30	40		60	80	120	240
multiples de 10								×				×		×	×		×	×	×	×
multiples de 2																				
multiples de 5																				

Reproduire et compléter le tableau, en cochant les multiples de 2 et de 5.

Partie B

On étudie l'épreuve aléatoire qui consiste à tirer au hasard un nombre parmi les 20 diviseurs de 240.

1. Quelle est la probabilité de tirer le nombre 2 ? le nombre 7 ?
2. On considère les évènements suivants :
   A : « On tire un multiple de 10 »,
   B : « On tire un multiple de 2 »,
   C : « On tire un multiple de 5 ».
   Déterminer les probabilités $p(\text{A})$, $p(\text{B})$ et $p(\text{C})$ des évènements A, B, C.
3. On refait cette épreuve aléatoire quatre fois de suite dans les mêmes conditions.

   a. Quelle est la probabilité de tirer 4 fois de suite un multiple de 10 ?

   b. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer un multiple de 10 ?

   c. Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois un multiple de 10 ?

   d. Pour tout naturel n compris entre 1 et 4, on note A_n l'évènement :
   « Obtenir un multiple de 10 pour la première fois au n-ième tirage ».
   Calculer les probabilités $p(\text{A}_2)$, $p(\text{A}_3)$ et $p(\text{A}_4)$ des évènements A_2, A_3, A_4.