BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5, et 1 page annexe non numérotée à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. *a.* Placer les points A, B et C sur une figure.

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. *a.* On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.

   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].

   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

   b. Exprimer z' en fonction de θ.

   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2 ; seule l'équation de Γ *donnée en* 1. *c. intervient à la question 4.*

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

   a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives : $x+\sqrt{3}y-2z=0$ et $2x-z=0$ ne sont pas parallèles.

   b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

   c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

   Montrer que Γ a pour équation cartésienne $y^2+z^2=7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

   Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

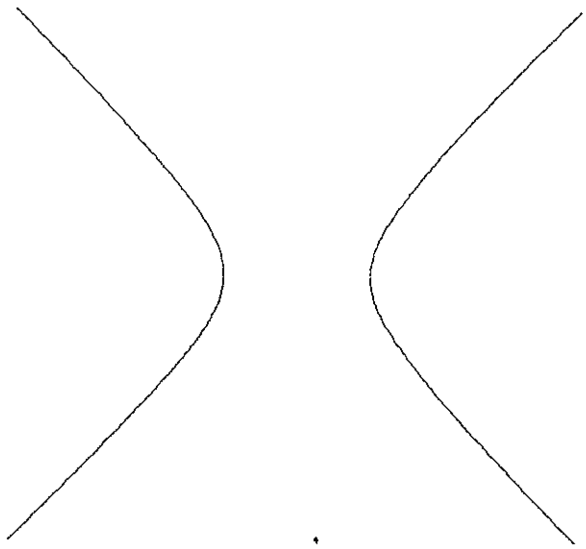


Figure 1

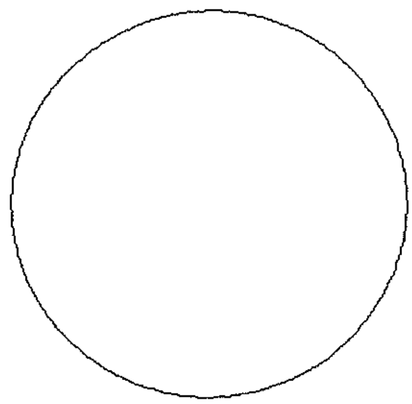


Figure 2

3. *a.* Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.

   b. Montrer la propriété suivante :

   pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise a^2+b^2 alors 7 divise a et 7 divise b.

4. *a.* Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

   si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

   b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(11 points)*

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- *un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)*
- *un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).*

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y'=ay$.

(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$(E) \quad g'(t) = a\,g(t)\left(1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right),$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. *a.* Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}$.

   b. Résoudre (E').

   c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{\mathrm{M}}{1+Ce^{-at}}$, où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \mathrm{M}$.

   b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0)=\frac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g''=a(1-\frac{2g}{\mathrm{M}})\,g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus. Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en Annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (0,5 ; 2). En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que g(0) = N_0 et que M = 100 N_0, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t)=\frac{100}{1+99\times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2003

MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ

Série : S

PAGE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.

Tournez la page S.V.P.

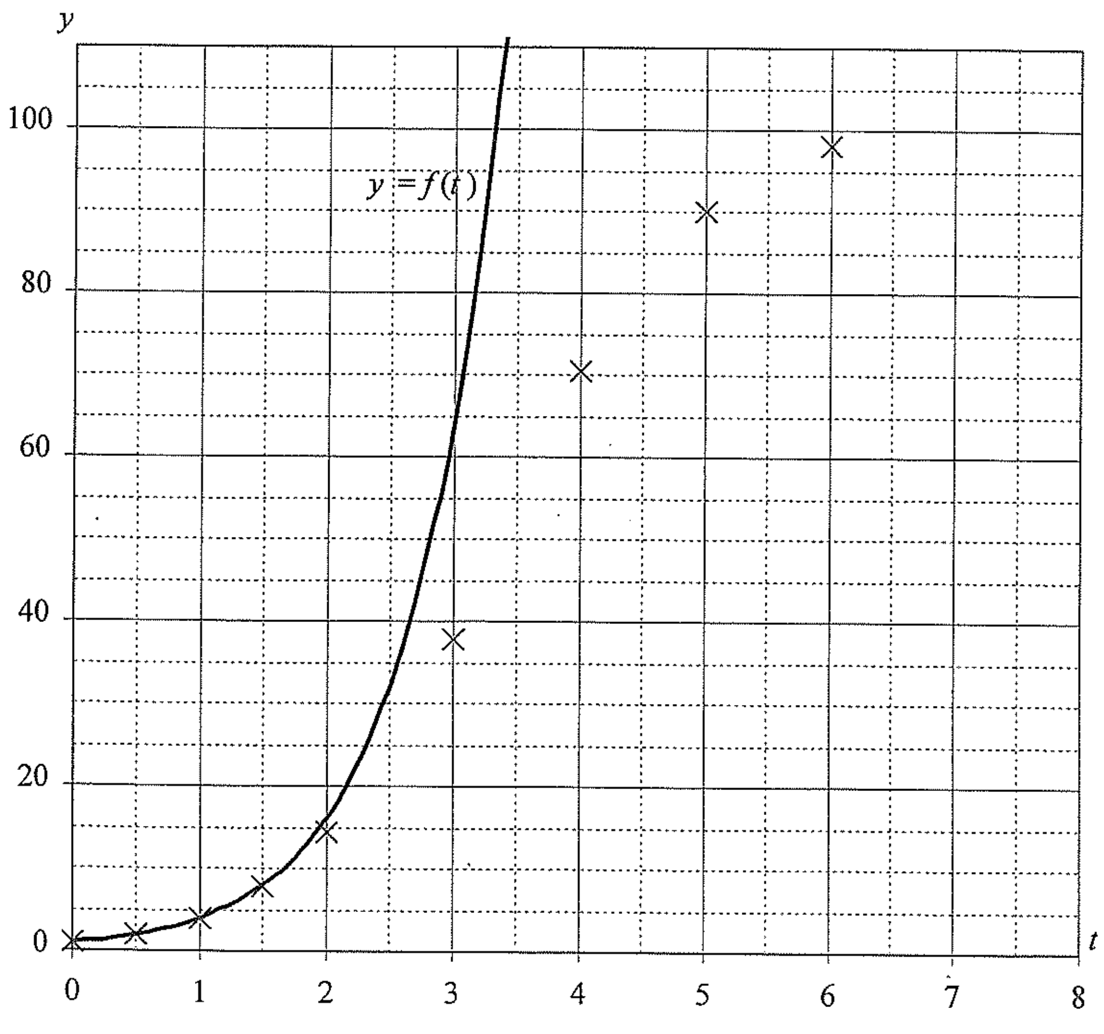
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que la fonction f, sont représentés dans le repère ci-dessous.

Annexe II



BACCALAURÉAT, SÉRIE S

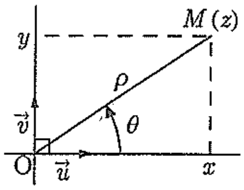
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z.



z a pour forme algébrique $x + iy$.

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\overline{z} = x - iy$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$

Module de z : $|z| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta\ [2\pi]$

Conjugué de z : $\overline{z} = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z|\,|z'|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ \ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe t, $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

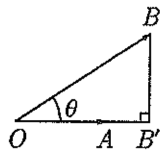
Homothétie de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$



Produit scalaire et coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R est $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Soient a, b et c trois nombres réels $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\dfrac{b}{2a}$
- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$, $\quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad$ $P(\Omega) = 1$ $\qquad$ $P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathrm{E}(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ $\qquad$ $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$P(X=1) = p$ $\quad$ et $\quad$ $P(X=0) = 1-p$

$\mathrm{E}(X) = p$ $\qquad$ $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$

Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs entières $0, 1, \ldots, n$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathrm{E}(X) = np$ $\qquad$ $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Loi uniforme sur $[0\,;1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0\,;1]$,

$P(J) = $ longueur de J

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$,

dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

Pour tout $c \geqslant 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$u_n = u_0 + n\,a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b\,u_n$

$u_n = u_0\,b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Limite d'une suite géométrique

Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

B. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonctions exponentielles et logarithmes*

$e^0 = 1$

Pour tous réels a et b,

$e^{a+b} = e^a\,e^b$ $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\qquad (e^a)^b = e^{a\,b}$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$\ln a\,b = \ln a + \ln b$ et $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a}$ $\qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$,

$y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

2. *Racine $n^{ème}$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in [0\,;+\infty[$ et $y \in [0\,;+\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n\,e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n\,e^{-x} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\times\ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u'+v'$ $\qquad (k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$ $\qquad (v\circ u)' = (v'\circ u)\,u'$

$(e^u)' = e^u\,u'$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$.

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ alors $g'(x) = f(x)$.

Formule de Chasles

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

Linéarité

$\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Ordre

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

Inégalité de la moyenne

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$

alors $m(b-a)\leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$

Intégration par parties

$\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$

La *valeur moyenne* de f sur $[a,\,b]$ $(a\neq b)$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C\in\mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$,

si $a\equiv b\ \ [n]$ et $a'\equiv b'\ \ [n]$, alors

$a+a'\equiv b+b'\ \ [n]$ $\qquad a-a'\equiv b-b'\ \ [n]$

$a\,a'\equiv b\,b'\ \ [n]$ $\qquad a^p\equiv b^p\ \ [n]$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

- Similitude directe : $z' = a\,z+b$ où $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$
- Similitude indirecte : $z' = a\,\overline{z}+b$ où $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, une équation du cylindre d'axe $\left(O;\vec{k}\right)$ et de rayon $r>0$ est $x^2+y^2=r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $\left(O;\vec{k}\right)$ est $x^2+y^2 = z^2\tan^2\theta$.