

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices conformes à la réglementation en vigueur et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1°- On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la droite \mathcal{d} d'équation $y = x$ et la courbe \mathcal{P} représentative de la fonction $f : x \mapsto x(2 - x)$.
- Utiliser \mathcal{d} et \mathcal{P} pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3 .

2°- On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0 ; 1[$.

- Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Que peut-on en déduire ?

3°- On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

On considère la suite numérique (v_n) définie sur \mathbf{N} par $v_n = 1 - u_n$.

- Exprimer, pour tout entier n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

MA SE IN1		EXAMEN : BACCALAUREAT GENERAL	SPECIALITE : SERIE S	
SESSION 2003	SUJET	EPREUVE : MATHEMATIQUES – ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE		
DUREE : 4 H	COEFFICIENT DE L'EPREUVE : 9	CODE SUJET : 21cs03	PAGE : 1/5	

EXERCICE 2 (5 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie :

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe en page 5 sur laquelle on raisonnera.

La page 5 sera jointe à la copie.

d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α .

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α .

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α .

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3 , B_1 celui de d_1 et d_2 , et C_1 celui de d_2 et d_3 .

1°- On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1 . Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.

2°- En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie :

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A - Construction de la figure

1°- Placer les points $A(-4 - 6i)$, $B(14)$, $C(-4 + 6i)$, $A_1(3 - 7i)$, $B_1(9 + 5i)$ et $C_1(-3 - i)$.

2°- Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA].
Placer ces points sur la figure.

3°- Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.

On admettra que B_1, J, C_1 d'une part, et C_1, K, A_1 d'autre part sont alignés.

4°- Déterminer une mesure en radians de l'angle (\vec{IB}, \vec{IB}_1) .

On admettra que $(\vec{KA}, \vec{KA}_1) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{JC}, \vec{JC}_1) = \frac{\pi}{4}$.

5°- Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

B – Recherche d'une similitude directe s transformant ABC en $A_1B_1C_1$.

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C respectivement en A_1, B_1 et C_1 .

1°- Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z + 2 - 2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s .

2°- a) Déterminer le rapport et l'angle de s .
b) Déterminer l'affixe du centre Ω de s .

3°- Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

PROBLEME (11 points)

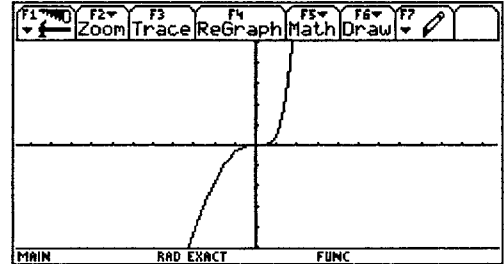
On considère la fonction numérique f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

- le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?
- la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : Contrôle de la première conjecture.

1°- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$

où g est la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2°- Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
- En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbf{R} .
On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3°- Sens de variation de la fonction f sur \mathbf{R} .

- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f .
- Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B : Contrôle de la deuxième conjecture.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1°- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2°- On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.

- Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0 ; 1]$.
- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

- 3°- a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe $(x'x)$.
- Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
 - Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : Tracé de la courbe.

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle $[-0,2 ; 0,4]$, dans le repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec les unités suivantes :

- Sur l'axe $(x'x)$: 1 cm représentera 0,05
- Sur l'axe $(y'y)$: 1 cm représentera 0,001

1°- Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \cdot 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,20	-0,15	-0,10	-0,05	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)$													

2°- Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : Calcul d'aire.

On désire maintenant calculer l'aire du domaine \mathcal{D} fermé délimité par la courbe Γ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln(2)$.

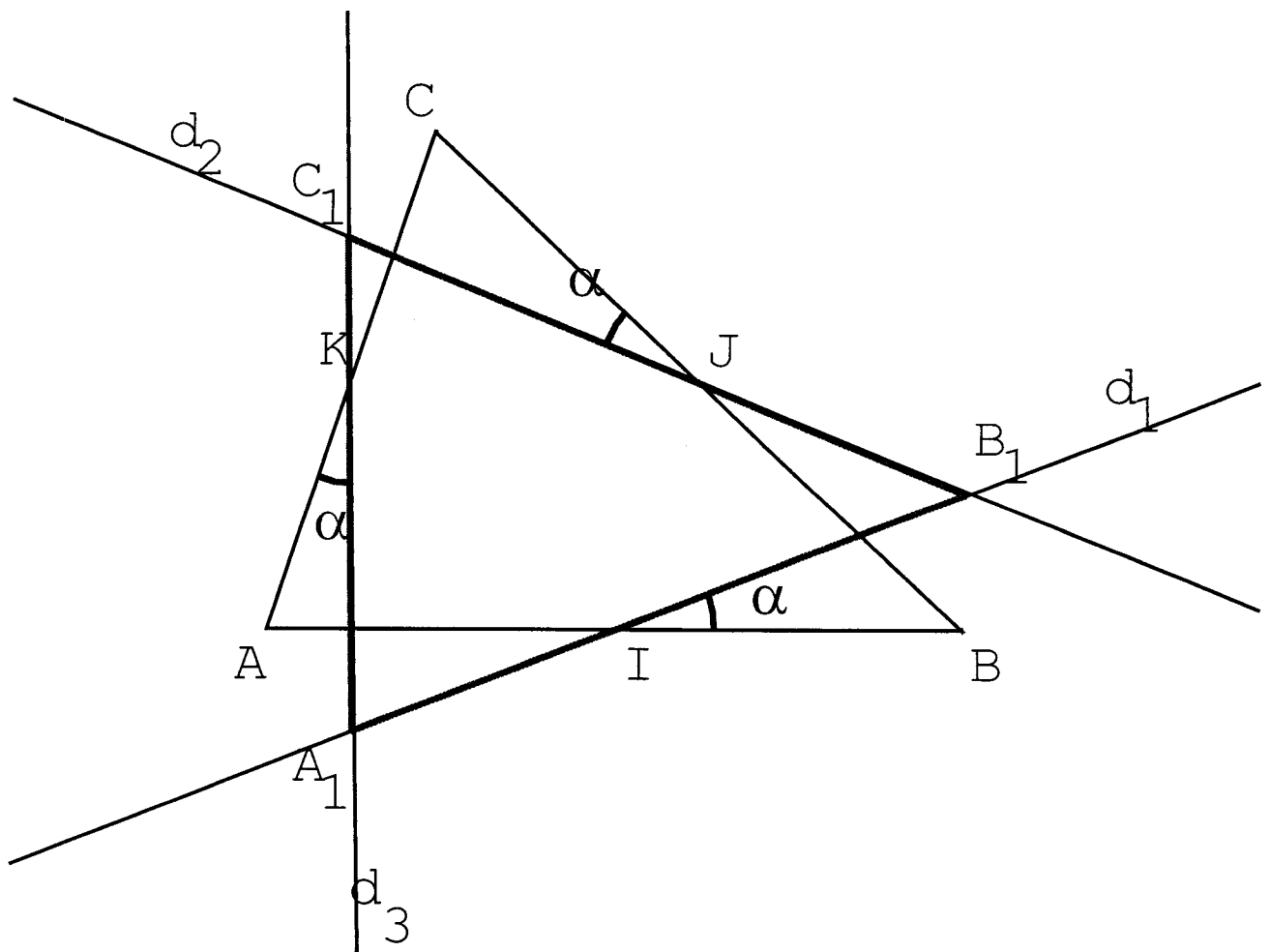
1°- A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur \mathbf{R} de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.

2°- En déduire une primitive F sur \mathbf{R} de la fonction f .

3°- Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} puis en donner une valeur approchée en cm^2 .

EXERCICE 2

Le candidat joindra cette page à sa copie

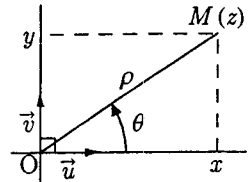


BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z .



z a pour forme algébrique $x + iy$.

Partie réelle de z : $\text{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\text{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$

Module de z : $|z| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$

Conjugué de z : $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z| |z'|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors \overline{AB} a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur \vec{u} d'affixe t , $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

Homothétie de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport

$k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

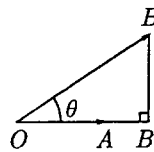
Rotation de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de

mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \theta$$



Produit scalaire et coordonnées

Si \vec{u} et \vec{v} admettent pour coordonnées respectives

(x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal

de l'espace alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées

(a, b, c) et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a b + b^2)$$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS \mathbb{C}

Soient a , b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\frac{b}{2a}$

- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta \neq 0$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMETRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$

Si A_1, \dots, A_n forment une partition de A , $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

C. COMBINAISSONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad 0! = 1.$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments

d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p , $p \in [0; 1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p$$

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p)$$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^$, $p \in [0; 1]$*

X peut prendre les valeurs entières 0, 1, ..., n

Pour $0 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$$

Loi uniforme sur $[0; 1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0; 1]$,

$P(J) = \text{longueur de } J$

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$,

dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

Pour tout $c \geq 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$$u_n = u_0 + n a$$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b u_n$

$$u_n = u_0 b^n$$

Somme de termes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Si } b \neq 1 \text{ alors } 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Limite d'une suite géométrique

$$\text{Si } 0 < b < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0.$$

$$\text{Si } b > 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty.$$

B. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions exponentielles et logarithmes

$$e^0 = 1$$

Pour tous réels a et b ,

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$$\ln a b = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Pour tout $a \in]0; +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \ln(a^x) = x \ln a$$

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[, \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0; +\infty[$,

$$y = e^x \quad \text{équivalent à} \quad x = \ln y.$$

2. Racine $n^{\text{ème}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in]0; +\infty[$ et $y \in]0; +\infty[$,

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{équivalent à} \quad x = y^n.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0; +\infty[, x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v' \quad (k u)' = k u' \quad k \text{ étant une constante}$$

$$(u v)' = u' v + u v' \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2} \quad (v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u' \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

$$\text{Si } F \text{ est une primitive de } f \text{ alors } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

$$\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$$

$$\text{Si } g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ alors } g'(x) = f(x).$$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Positivité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Ordre

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \leq g \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Inégalité de la moyenne

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } m \leq f \leq M$$

$$\text{alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

$$\text{La valeur moyenne de } f \text{ sur } [a, b] \text{ (} a \neq b \text{) est } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a y + b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$,

si $a \equiv b [n]$ et $a' \equiv b' [n]$, alors

$$a + a' \equiv b + b' [n] \quad a - a' \equiv b - b' [n]$$

$$a a' \equiv b b' [n] \quad a^p \equiv b^p [n]$$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

- Similitude directe : $z' = a z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

- Similitude indirecte : $z' = a \bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(O; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(O; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$.

