Baccalauréat ES Liban juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Des éléments de formulaire sont joints au sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Sur le document réponse n° 1 ci-joint, la courbe $\mathscr{C}_1$ représente, dans le plan muni d'un repère orthogonal, une fonction f définie dans l'intervalle $[-1 ; 6]$.

On sait que la courbe $\mathscr{C}_1$:

- coupe l'axe des ordonnées en le point A, d'ordonnée 3, et l'axe des abscisses en le point B, d'abscisse b,
- admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2,
- admet la droite T_A pour tangente au point A.

Partie A Étude graphique de la fonction f

Répondre sans justification aux questions **A.1, A.2, A.3** et **A.4** sur le document réponse n° 1.

Partie B Étude de la fonction $g = \ln f$

On étudie maintenant la fonction g qui à x associe $g(x) = \ln[f(x)]$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Chacune des réponses devra être justifiée avec soin sur la copie.

B.1 Préciser l'intervalle de définition I de la fonction g.

B.2 Déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers b.

B.3 Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle I. Dresser son tableau de variations.

B.4 Calculer $g'(0)$ puis $g'(2)$.

B.5 Résoudre, dans I, l'inéquation $g(x) \geqslant -\ln 2$.

On utilisera les résultats de la partie **A**.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les résultats approchés seront donnés sous forme décimale, arrondis à 10^{-3}.

Pour répondre aux questions on pourra s'aider d'arbres pondérés.

Un centre d'entraînement réputé se voit confier de très nombreux chevaux, juments et mâles, spécialisés en trotteurs ou en galopeurs selon leurs aptitudes. Ainsi le centre comprend 62 % de galopeurs, 30 % de juments dont 35 % font du galop.

On définit les évènements suivants :

- J : « Le cheval est une jument »,
- T : « Le cheval est un trotteur ».

Un lad, chargé des soins, choisit au hasard un cheval du centre.

1. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un trotteur ?
2.
   a. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit une jument qui fasse du galop ?

   b. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un mâle qui fasse du galop ?
3. Le lad a choisi un mâle. Quelle est la probabilité que ce ne soit pas un trotteur ?

   Tôt le matin, il faut transporter quatre chevaux, du centre d'entraînement à l'hippodrome. Pour cela, un apprenti choisit les chevaux au hasard et de manière indépendante ; on admet que le nombre de chevaux dans ce centre est suffisamment grand pour assimiler le choix des quatre chevaux à des tirages successifs avec remise.

4. a. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux trotteurs parmi les quatre chevaux choisis.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un galopeur parmi les quatre chevaux choisis.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Lors d'une partie de fléchettes, un joueur envoie une à une des fléchettes vers une cible. La tentative est réussie quand la fléchette atteint la cible, elle échoue dans le cas contraire.

Pour la 1$^{\text{re}}$ fléchette, les chances de réussite ou d'échec sont égales.

Pour chaque lancer suivant, la probabilité qu'il réussisse dépend uniquement du résultat du lancer précédent :

- Elle est de 0,7 quand le lancer précédent atteint la cible ;
- Elle est de 0,4 quand il a échoué.

On note :

- C_n l'évènement « La n^{e} fléchette atteint la cible »,
- E_n l'évènement « Le n^{e} lancer a échoué ».

1. La partie ne comporte que deux fléchettes. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré. En déduire la probabilité pour que la 2$^{\text{e}}$ fléchette atteigne la cible.

   Dans toute la suite de l'exercice, *n* désigne un entier supérieur ou égal à 1 et on considère que le jeu se déroule avec *n* fléchettes.

   On désigne par c_n la probabilité d'atteindre la cible lors du n^{e} lancer et par e_n la probabilité que ce lancer échoue.

   On note $P_n = [c_n \quad e_n]$ la matrice ligne qui traduit l'état probabiliste lors du n^{e} lancer.

   La matrice $\mathrm{P}_1 = [0,5 \quad 0,5]$ traduit donc l'état probabiliste initial lors du 1$^{\text{e}}$ lancer.

2. a. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
   b. Donner l'état P_2.

3. a. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{A}$ où A est la matrice de transition $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, exprimer la probabilité c_{n+1} d'atteindre la cible lors du $(n+1)^{\text{e}}$ lancer en fonction des probabilités c_n et e_n.
   b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $c_{n+1} = 0,3c_n + 0,4$.

4. Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = c_n - \dfrac{4}{7}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,3.
   b. En déduire u_n puis c_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de c_n quand n tend vers l'infini. Interpréter cette limite.

EXERCICE 3 **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude de propriétés de quelques fonctions

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,900]$ par :

$$f(x) = 7\,500\mathrm{e}^{0,002x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 15\mathrm{e}^{0,002x}.$$

1. Montrer que f est une primitive de la fonction g.
2. Soit la fonction h définie sur $[0\,;\,900]$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   a. Calculer la limite de h en 0.
   b. Calculer la dérivée de h et montrer que la fonction h admet un minimum, noté b, pour une valeur de x, notée a.

   Dans le repère orthogonal ci-joint (document réponse n$^{\text{o}}$ 2) sont tracées les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h dans l'intervalle $[0\,;\,900]$ ainsi que la droite (D) d'équation $y = 45$.
3. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h se coupent au point $I(a\,;\,b)$.
4. a. Résoudre dans $[0\,;\,900]$ l'équation $g(x) = 45$. Soit x_0 la solution de cette équation.
   b. Justifier, que l'équation $h(x) = 45$ possède exactement deux solutions x_1 et x_2 dans l'intervalle $]0\,;\,900]$ (x_1 désignera la plus petite des deux solutions, x_2 la plus grande).

   Donner une valeur arrondie à l'unité de x_1 et x_2.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{x_1} [45 - g(x)]\,\mathrm{d}x = f(0)$.

   On note E le point d'intersection de la droite (D) avec $\mathscr{C}_g$, R et F les points d'intersection de cette droite (D) avec $\mathscr{C}_h$, tandis que B et L désignent les points d'intersection de l'axe des ordonnées avec respectivement la droite (D) et la courbe $\mathscr{C}_g$.
6. Placer sur l'axe des abscisses les nombres a, x_0, x_1 et x_2.

Partie B Étude de coûts

Rappels :

• Le coût marginal d'une production q assez grande est le coût de l'unité suivante, c'est à dire de la $(q+1)^{\text{e}}$ unité. La fonction « coût marginal » C_m est considérée comme la dérivée de la fonction « coût total » C_T.

• Le coût moyen unitaire d'une production q est le quotient $\dfrac{C_T(q)}{q}$.

Une entreprise peut produire jusqu'à 900 unités par jour.

Ses coûts fixes journaliers s'élèvent à 7 500 € ;

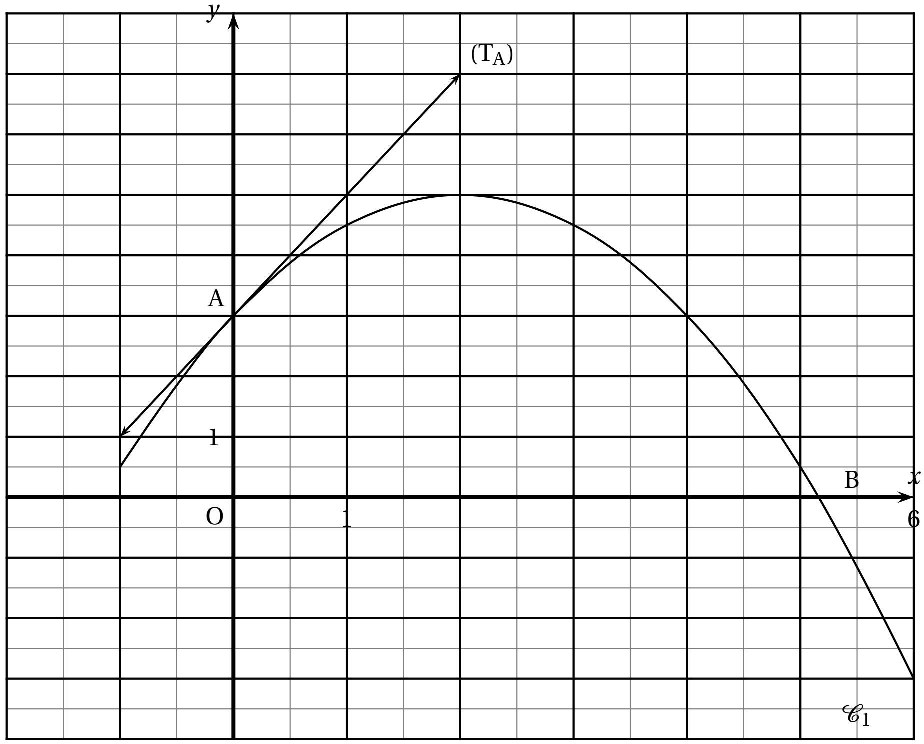
• Toute sa production journalière est vendue au prix unitaire de 45 € ;

• Pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,900]$, le coût marginal de x unités est modélisé par :

$C_m(x) = g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

1. a. Justifier que le coût total journalier de production est défini par la fonction f étudiée dans la **partie A**.
   b. En utilisant le résultat de la question **A.5.**, en déduire le domaine du plan dont l'aire représente les coûts fixes journaliers. (On hachurera le domaine sur le document réponse).
2. Que représente la valeur $h(x)$?
3. Justifier, à partir du graphique, que le bénéfice journa1ier de l'entreprise est positif lorsque la production est comprise entre x_1 et x_2.
4. a. Calculer, à 10^{-1} près, le bénéfice réalisé sur la fabrication de la 401^{e} unité. On fera apparaître ce bénéfice sur le graphiqué.
   b. En déduire ce que représente l'aire du domaine, délimité par la droite d'équation $x = x_1$ la droite d'équation $x = x_0$ et les courbes (D) et $\mathscr{C}_g$.

Document-réponse n$^{\text{o}}$ 1, à rendre avec la copie (exercice 1)



A.1. Lire graphiquement :

$f(-1) =$; $f(0) =$; $f(2) =$; $f(5) =$; $f(6) =$

A.2. Résoudre graphiquement sur $[-1~;~6]$.

a. $f(x) = 0$ $\quad x = \cdots$ **b.** $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ $\quad x \in \cdots$

A.3. Déterminer graphiquement :

a. $f'(0) =$ **b.** $f'(2) =$

A.4. Résoudre graphiquement sur $[-1~;~6]$:

$$f'(x) > 0 \qquad x \in \cdots$$

Document-réponse n^{o} 2, à rendre avec la copie (exercice 3)