Baccalauréat L La Réunion juin 2004

Le candidat traitera obligatoirement trois exercices
OBLIGATOIREMENT L'exercice 1 et l'exercice 2
AU CHOIX : L'exercice 3 ou l'exercice 4.
L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[1\,;\,12]$ par :

$$f(x) = x - 1 - 4\ln x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique : 1 cm.

1. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,12]$, $f'(x)$ peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{x-4}{x}.$$

   b. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;\,12]$, et en déduire le tableau de variation de f.

   c. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe en son point B d'abscisse 1.

2. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs arrondies à 0,1 près.

x	1	2	3	4	6	8	10	11	12
$f(x)$									

   b. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ dans le même repère sur la feuille de papier millimétré fournie.

   Formulaire : La dérivée de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction qui, à x, associe $\dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **7 points**

Il est assez curieux qu'une infinité de termes positifs que l'on ajoute au fur et à mesure puisse donner un résultat fini. Ainsi le Grec Zénon prétendait, au IV$^{\text{e}}$ siècle avant J-C., démontrer qu'il est impossible d'aller d'un point à un autre car « avant d'atteindre le but, il faut arriver au milieu de la route, puis atteindre le milieu du trajet à parcourir, et ainsi de suite . Comme il y a une infinité d'étapes à observer, on ne peut arriver au bout de son voyage ».

Les nombres et leurs mystères - A. Warusfel

I - Construction de la figure :

Construire un segment [AB] puis,

1. le milieu A_0 de [AB],
2. le milieu A_1de $[A_OB]$,
3. le milieu A_2 de $[A_1B]$.

II - Utilisation d'une suite numérique :
On construit ainsi une suite de points A_n tels que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}\mathrm{B}]$.
On suppose que AB = 2. On pose $d_0 = \mathrm{AA}_0,\ d_1 = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1,\ d_2 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ et pour tout entier $n \geqslant 1\ :\ d_n = A_{n-1}A_n$.

1. On a $d_0 = 1$; calculer d_1 et d_2.

2. On admet que, pour tout entier naturel $n\ :\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n$.

a. En déduire que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier tenue et la raison.

b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

3. On pose $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

a. Vérifier que $S_n = 2\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

b. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini ?

c. En donner une interprétation géométrique.

Formulaire : Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q (avec q?1) :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

EXERCICE 3 AU CHOIX **6 points**

Le code barre à 13 chiffres ou EAN 13 (European Article Number) est un code constitué de 13 chiffres compris entre 0 et 9, utilisé pour classifier les produits de la grande distribution :

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,a_8\,a_9\,a_{10}\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}$$

On calcule $S = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$.
Le code est accepté lorsque : $S \equiv 0 \ \ [\text{modulo } 10]$, il est refusé sinon.

1. En pratique
On considère le code A = 97 80130 51518 6.

a. Vérifier que A est accepté.

b. Au lieu du code A, on a saisi le code B = 97 70130 51518 6 en commettant une erreur sur le troisième chiffre. Montrer que le code B est refusé.

c. Lors de la saisie du code A, deux chiffres voisins ont été permutés.
Le code C = 97 80135 01518 6 est-il accepté ou refusé ?
Le code D = 97 80130 15518 6 est-il accepté ou refusé ?

2. Effet d'une erreur de saisie sur le quatrième chiffre

a. On désigne par E le code 97 8n130 515186 où n représente un chiffre. Si $n = 0$, on retrouve le code A donc E est accepté.
Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles E est accepté.

b. En déduire qu'une erreur de saisie sur le quatrième chiffre du code A est toujours détectée.

EXERCICE 4 AU CHOIX **6 points**

On lance simultanément deux dés équilibrés (un bleu et un vert), dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
(On suppose qu'il y a équiprobabilité pour tous les couples de nombres possibles).
On note S la somme des nombres obtenus.
(N.B. : Tous les résultats des calculs de probabilité seront donnés sous forme de fractions).

1. **a.** Compléter le tableau n^o 1 (en annexe, à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi) par la somme des nombres obtenus.

   b. Compléter le tableau n^o 2 (en annexe, à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi)

   ($P(S)$ représente la probabilité que la somme des deux dés soit égale à S).

2. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement A : « $5 \leqslant S \leqslant 9$ ».

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une somme S impaire est égale à $\frac{1}{2}$.

3. On lance les deux dés, trois fois de suite. À l'issue de chaque lancer on note la somme obtenue.

   a. Montrer que la probabilité d'obtenir exactement trois fois une somme impaire est égale à $\frac{1}{8}$.

   b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois une somme impaire.

Annexe de l'exercice 4 (à rendre avec la copie si l'exercice 4 est choisi)

Tableau n^o 1 : Somme des nombres obtenus.

vert \ bleu	1	2	3	4	5	6
1	2					
2	3					
3	4					
4	5		7			
5	6	7				
6	7					

Tableau n^o 2 :

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S)$					$\frac{5}{36}$						