Baccalauréat L Polynésie juin 2004

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

L'annexe est à rendre avec la copie

Le candidat doit traiter **trois** exercices
Obligatoirement : l'exercice 1 et l'exercice 2
Au choix : l'exercice 3 **ou** l'exercice 4

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **8 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f donné sur l'annexe (à rendre avec la copie).
4. Placer les points A, B, C, D, L, M sur l'annexe (à rendre avec la copie). Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'annexe.

Partie B

1. On note F le point de coordonnées $(2\,;\,0)$ et G le point de coordonnées $(4\,;\,0)$.
   On a construit sur l'annexe le rectangle R_1 dont la longueur mesure $f\left(\frac{3}{2}\right)$, dont une largeur est le segment [EF] et tel que le point K se situe sur la largeur opposée.
   Construire de manière analogue les rectangles R_2 et R_3 définis de la manière suivante :
   - R_2 est le rectangle dont la longueur mesure $f(3)$ dont une largeur est le segment [GF] et tel que le point L se situe sur la largeur opposée ;
   - R_3 est le rectangle dont la longueur mesure $f\left(\frac{9}{2}\right)$, dont une largeur est le segment [GH] et tel que le point M se situe sur la largeur opposée.
2. Calculer la somme A_1, des aires de R_1, R_2 et R_3. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

Partie C

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par

$$F(x) = 4\ln x + 2x.$$

1. Montrer que $F'(x) = f(x)$.
2. On admet que l'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses. la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 5$ est donnée par $F(5) - F(1)$.
   Calculer l'aire A_2 de ce domaine. En donner une valeur approchée â 0,01 près.

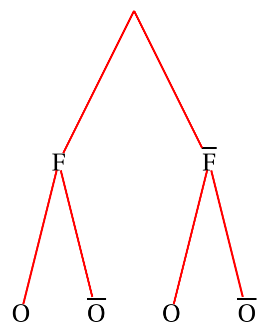
EXERCICE 2 **6 points**

Une étude a été faite dans un lycée en début d'année scolaire, concernant la création dun journal. Tous les élèves ont été interrogés.
Au lycée il a 55 % de filles.
À la question : « achèteriez-vous le journal du lycée ? », 72 % des filles ont répondu OUI, 60 % des garçons ont répondu OUI.

Partie A

On choisit au hasard un élève du lycée. Chaque élève a donc la méme probabilité d'être choisi.
On appelle F l'évènement « l'élève choisi est une fille ».
On appelle O l'évènement « l'élève choisi a répondu OUI ».
On note $\overline{\text{F}}$ l'évènement contraire de F et $\overline{\text{O}}$ l'évènement contraire de O.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous (on notera sur chaque branche la probabilité correspondante).



2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille et que cet élève ait répondu OUI.
3. Calculer la probabilité quel élève choisi soit un garçon et que cet élève ait répondu OUI.
4. En déduire la probabilité que l'élève choisi ait répondu OUI.

Partie B

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Le journal est créé au lycée et son premier numéro parait au mois de décembre, puis une fois par mois jusqu'au mois de mai inclus.
On interroge un élève du lycée au mois de juin. On suppose que chaque mois de parution, la probabilité que l'élève achète le journal est 0,6 et cela de façon indépendante chaque mois. Cette probabilité ne change pas au cours de l'année.

1. Calculer la probabilité que cet élève n'ait jamais acheté le journal.
2. Calculer la probabilité que cet élève ait acheté le journal au moins une fois.
3. Calculer la probabilité que cet élève ait acheté le journal exactement deux fois.

EXERCICE 3 **6 points**

1. On se propose de crypter un message en remplaçant chaque lettre du message par une autre lettre. Pour cela on attribue à chaque lettre de l'alphabet un rang (A a le rang 0, B a le rang 1, ... et Z a le rang 25).

   On donne ci-dessous le rang des lettres de l'alphabet :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
rang de la lettre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang de la lettre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On remplace la lettre de rang x par la lettre de rang y ($0 \leqslant y \leqslant 25$) tel que $y \equiv 7x + 3 \quad$ (modulo 26).

Par exemple : pour crypter le lettre R,

- on repère son rang (ici $x = 17$) ;
- on calcule y ; on obtient alors :

$y \equiv 7 \times 17 + 3 \quad$ (modulo 26)

$y \equiv 122 \quad$ (modulo 26) :

$y \equiv 18 \quad$ (modulo 26) puisque $122 = 4 \times 26 + 18$;

donc $y = 18$.

- on remplace R par la lettre de rang 18, qui est la lettre S.

Crypter le mot S E C R E T

2. On se propose maintenant de décrypter.

Par exemple, pour trouver quelle est la lettre qui a été remplacée par la lettre N de rang $y = 13$

- Il suffit de résoudre l'équation $13 \equiv 7x + 3 \quad$ (modulo 26) :
- Cela revient à chercher x tel qu'on puisse écrire $7x \equiv 10 - 26n$ avec n entier naturel
- En donnant à n les valeurs entières successives 0, 1, 2, . . . on trouve $x = 20$. La lettre qui a été remplacée par la lettre N a pour rang 20, c'est donc la lettre U.

On a reçu le message suivant : S F N Z Z H G F.

Décrypter le message reçu.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 0,7$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 0,4 \qquad (n \quad \text{entier naturel}).$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $v_n = u_n - 0,4$.

   a. Calculer v_n.

   b. Montrer que $v_{n+1} = 2v_n$.

   c. En déduire la nature de la suite.

   d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Partie B

La règle de Titius-Bode (connue vers 1770) permet de retrouver approximativement la distance au Soleil de la plupart des planètes du système solaire.

Pour cela, on prend comme unité la distance de la Terre au Soleil qui vaut environ 150 millions de kilomètres. Cette unité est appelée unité astronomique (u.a.). Ainsi 1 u.a. $\approx 15 \times 10^7$ km.

En écriture moderne, la loi de Titius-Bode s'exprime par la formule suivante :

$$u_n = 0,4 + 0,3 \times 2^n$$

où pour une planète donnée u_n est la distance au Soleil de cette planète (en u.a.) et n est le rang de la planète, défini dans le tableau ci-dessous :

Planète	Vénus	Terre	Mars	(Cérès)*	Jupiter	Saturne	Uranus
Rang n	0	1	2	3	4	5	6

(*) La lacune observée entre les orbites de Mars et Jupiter fut comblée en 1801 par la découverte de la planète Cérès, puis plus tard de milliers d'astéroïdes.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

2. **a.** Calculer la distance approximative au Soleil de la planète Uranus (on donnera le résultat en millions de kilomètres).

b. Calculer le rang de la planète dont la distance approximative au soleil est 780 millions de kilomètres. De quelle planète s'agit-il ?

Annexe de l'exercice 1

À rendre avec la copie

Tableau de valeurs de la fonction f à compléter

point	A	B	C	D	K	L	M
x	1	2	4	5	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$
$f(x)$					$\frac{14}{3}$		$\frac{26}{9}$

Représentation graphique de la fonction f