CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2004

CORRIGE

MATHEMATIQUES

- Série S -

Ce corrigé comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (3 points)

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2) a) Par récurrence : $u_0 = 1$, donc $u_0 > 0^2$ et, si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, donc $u_{n+1} > (n + 1)^2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc (u_n) a pour limite $+\infty$.

3) Conjecture de : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (n + 1)^2$ (par exemple à partir des premiers termes).
Preuve par récurrence : $u_0 = (0 + 1)^2$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n + 2)^2$; d'où le résultat.

Remarque : la question **3)** peut être résolue indépendamment de la question **2)**.

EXERCICE 2, non spécialistes (5 points)

1) On obtient $(1 + \mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$ de différentes façons, par exemple par module et argument ou par la formule du binôme.

2) a) $[(1 + \mathrm{i})^3]^2 = -8\mathrm{i}$, donc $(1 + \mathrm{i})^3$ est une solution de (E).

b) $(-z)^2 = z^2$ donc $-(1 + \mathrm{i})^3$ est aussi solution de (E) ; sa forme algébrique est $2 - 2\mathrm{i}$.

3) $[(1 + \mathrm{i})^2]^3 = -8\mathrm{i}$, donc $(1 + \mathrm{i})^2$ (c'est-à-dire $2\mathrm{i}$) est une solution de (E′).

4) a) La rotation r se traduit par $z' = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}z$, d'où $\mathrm{b} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $\mathrm{c} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b) $b^3 = c^3 = -8\mathrm{i}$, donc b et c sont aussi solution de (E′).

5) a) Points A(0 ; 2), B$(-\sqrt{3}\,;-1)$, C$(\sqrt{3}\,;-1)$.

b) Le triangle ABC est équilatéral, car AB = BC = CA = $2\sqrt{3}$.

c) $z_\mathrm{G} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B} + z_\mathrm{C}}{3} = 0$, donc le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

EXERCICE 2, spécialistes (5 points)

1) $1+x+x^2+...+x^{k-1}=\dfrac{x^k-1}{x-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$). Donc : $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x-1)\dfrac{x^k-1}{x-1}=x^k-1$.

2) a) d est un diviseur positif de n donc il existe un entier positif k tel que $n = dk$. On a alors : $a^n-1=a^{rk}-1=(a^d)^k-1$. On applique le résultat de la question précédente avec x égal à a^d ; on obtient : $a^n-1=(a^d)^k-1=(a^d-1)(1+a^d+....+(a^d)^{k-1})$, donc a^d-1 divise a^n-1.

b) On a $7 = 2^3 - 1$ et 3 divise 2004, donc 7 divise $2^{2004} - 1$. De même, on a $63 = 2^6 - 1$ et 6 divise 2004, donc 63 divise $2^{2004} - 1$; comme 9 divise 63, 9 divise aussi $2^{2004} - 1$.

3) a) Comme d est le pgcd de m et n, m' et n' sont premiers entre eux et, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v' tels que : $um' + v'n' = 1$; alors $um'd + v'n'd = d$, c'est-à-dire $um + v'n = d$; ainsi $mu - nv = d$ avec $v = -v'$.

b) On a $d = mu - nv$, donc $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1$.
d divise m donc d divise mu d'où $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$. De même, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.
Posons $\text{A}=\dfrac{a^{mp}-1}{a^d-1}$ et $\text{B}=\dfrac{a^{nq}-1}{a^d-1}$; l'égalité précédente s'écrit alors $\text{A} - a^d\text{B} = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, A et B sont premiers entre eux et $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c) On prend a = 2. En choisissant $mu = 63$ et $nv = 60$, donc $d = 3$ pour $m = 9$ et $n = 15$, le pgcd cherché est $2^3 - 1 = 7$ (d'autres choix sont possibles pour m, n, u et v).

EXERCICE 3 (4 points)

1) Les coordonnées de S(1, −2, 0) vérifient le système $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}$ et on peut lire celles du vecteur directeur : (1, 1, − 3).	réponse **D**
2) Les coordonnées $\left(\dfrac{8}{11};\dfrac{-25}{11};\dfrac{9}{11}\right)$ vérifient : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$.	réponse **D**
3) $d = \text{SH} = \sqrt{\dfrac{(11-8)^2+(-22+25)^2+(-9)^2}{11^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.	réponse **B**
4) le centre est H et le rayon r est solution de $\text{SH}^2 + r^2 = 9$, d'où $r=\sqrt{9-\dfrac{9}{11}}=3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.	réponse **B**

EXERCICE 4 (4 points)

1) $p([0\,;200[) = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-200\lambda}$, donc $e^{-200\lambda} = 0{,}5$; d'où $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) $p([300\,;+\infty[) = 1 - p([0\,;300[) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}}$, c'est-à-dire 0,35 ou 0,36.

3) **a)** Intégration par parties : $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx = \ldots = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En prenant $x = -\lambda A$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc

$d_m = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{200}{\ln 2}$, c'est-à-dire 288 ou 289 semaines.

EXERCICE 5 (4 points)

1) On a $v = x'$, donc $v' = x''$; alors (E) $\Leftrightarrow 25v + 200v' = 50 \Leftrightarrow v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.

Donc $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$, C étant une constante réelle.

2) **a)** On a $v(t) = x'(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 2$; la condition $x'(0) = 0$ permet de calculer $C = -2$; donc $x'(t) = -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2$.

b) $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t + K$, et $x(0) = 0$; donc $x(t) = 16e^{-\frac{1}{8}t} + 2t - 16$.

3) $v(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$; donc $V = 2$.

On résout dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $v(t) \leqslant 0{,}9 \times 2$, c'est-à-dire $t \leqslant 8\ln 10$; ainsi $t \in [0\,;8\ln 10]$.

4) $d = x(30) = 44 + 16e^{-3{,}75}$; $d \approx 44{,}3$ ou $d \approx 44{,}4$ (en mètres).