

**BACCALAUREAT GENERAL**

Session 2004

**MATHEMATIQUES**

- Série S -

**ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE***Durée de l'épreuve : 4 heures**Coefficient : 9*

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7. Les pages 6 et 7 sont des annexes à rendre avec la copie.*

**EXERCICE 1 (4 points)**

*Commun à tous les candidats*

1) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$ .

a) Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que l'on ait, pour tout  $x > 1$  :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

b) Trouver une primitive  $G$  de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ .

Trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

3) En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :  $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx$ .

On donnera le résultat exact sous la forme  $p \ln 2 + q \ln 3$ , avec  $p$  et  $q$  rationnels.

**EXERCICE 2 (6 points)***Commun à tous les candidats**L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.*

Le but de ce problème est d'étudier, pour  $x$  et  $y$  éléments distincts de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , les couples solutions de l'équation  $x^y = y^x$  (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ .

2) Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $h$  est donnée en annexe ;  $x_0$  est l'abscisse du maximum de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- Rappeler la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$  et déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.
- Calculer  $h'(x)$ , où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$  ; retrouver les variations de la fonction  $h$ .  
Déterminer les valeurs exactes de  $x_0$  et de  $h(x_0)$ .
- Déterminer l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.

3) Soit  $\lambda$  un élément de l'intervalle  $]0, \frac{1}{e}[$ .

Prouver l'existence d'un unique nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$  et d'un unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tels que  $h(a) = h(b) = \lambda$ .

Ainsi le couple  $(a, b)$  est solution de (E).

4) On considère la fonction  $s$  qui, à tout nombre réel  $a$  de l'intervalle  $]1; e[$ , associe l'unique nombre réel  $b$  de l'intervalle  $]e; +\infty[$  tel que  $h(a) = h(b)$  (on ne cherchera pas à exprimer  $s(a)$  en fonction de  $a$ ).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers 1 par valeurs supérieures ?
- Quelle est la limite de  $s$  quand  $a$  tend vers  $e$  par valeurs inférieures ?
- Déterminer les variations de la fonction  $s$ . Dresser le tableau de variation de  $s$ .

5) Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

**EXERCICE 3 (5 points)***Commun à tous les candidats*

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25% de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2.

L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et dans K2 avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .

**Partie A**

1) Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,

C1 : « la particule entre dans K1 »,

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2) On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

**Partie B**

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note  $p(t)$  la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant  $t = 0$ , on a  $p(0) = 0,75$ . Plus généralement, si  $t$  est exprimé en années, on a  $p(t) = 0,75 e^{-\lambda t}$ , où  $\lambda$  est une constante réelle.

La demi-vie\* des particules de type A est égale à 5730 ans.

- 1) Calculer  $\lambda$  ; on prendra une valeur approchée décimale à  $10^{-5}$  près par défaut.
- 2) Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
- 3) Déterminer la valeur de  $t$  pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

\* temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

**EXERCICE 4 (5 points)***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[AC]$  et O le centre de  $\Gamma$  ; B est un point du cercle  $\Gamma$  distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Les droites  $(AB)$  et  $(CG)$  se coupent en un point M.

**Partie A**

- 1) Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
- 2) Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment  $[BC]$  et que le point G est le milieu du segment  $[CM]$ .
- 3) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe  $s$  de centre C transformant B en M.

**Partie B**

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives  $-1$  et  $1$ .

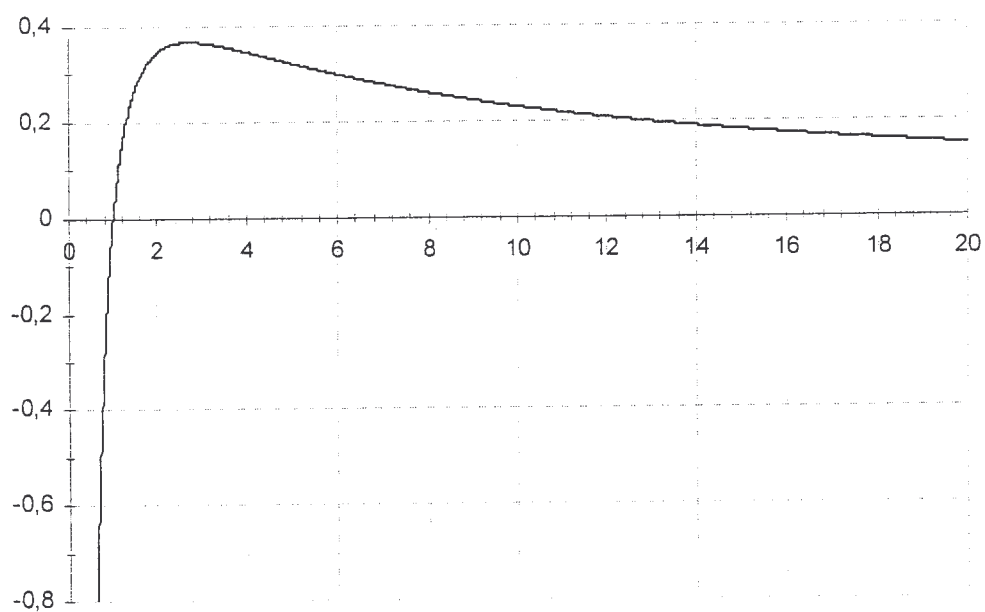
Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3} [2\pi].$$

- 1) Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
- 2) Soit  $\sigma$  la similitude directe d'expression complexe  $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$ . Déterminer les éléments caractéristiques de  $\sigma$  et en déduire que  $\sigma$  est la similitude réciproque de  $s$ .
- 3) Montrer que l'image E' du point E par  $\sigma$  a pour affixe  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et montrer que le point E' appartient au cercle  $\Gamma$ .
- 4) On note  $\mathcal{C}$  le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle  $\Gamma$  privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à  $\mathcal{C}$ .  
Soit O' l'image du point O par la similitude  $s$ . Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de  $\mathcal{C}$ .

## ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$ , obtenue à l'aide d'un traceur de courbe :

## ANNEXE DE L'EXERCICE 4

À rendre avec la copie

