

Durée : 3 heures

∞ Baccalauréat ES Amérique du Nord 1<sup>er</sup> juin 2005 ∞

EXERCICE 1

3 points

Commun tous les candidats

Les deux questions sont indépendantes.

Les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$ .

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30% en cinq ans.

- On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.  
Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89%.
- La première année cet impôt baisse de 5%, la deuxième année la baisse est de 1% et la troisième année de 3%.
  - Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années?
  - Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années?

EXERCICE 2

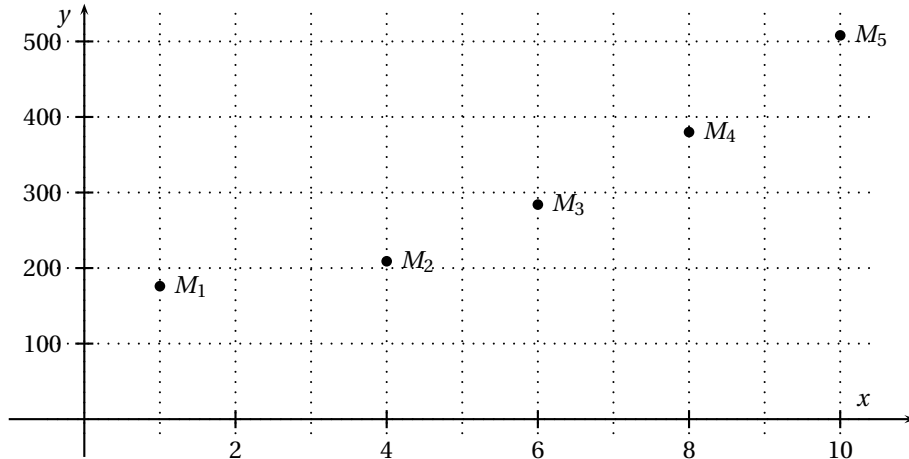
5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang $x_i$	1	4	6	8	10
C.A. $y_i$	176	209	284	380	508

- Le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté?



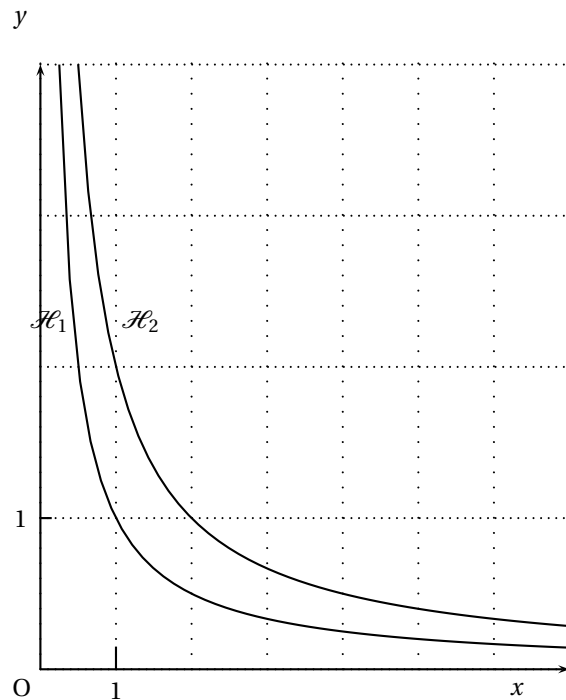
- On pose  $z_i = \ln y_i$ .
  - Calculer, en arrondissant à  $10^{-2}$  près, pour  $i$  variant de 1 à 5, les valeurs  $z_i$ , associées aux rangs  $x_i$  du tableau.
  - Construire le nuage de points  $N_i(x_i ; z_i)$  dans le repère orthogonal suivant :
    - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année,
    - sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3.
  - a. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite  $d$  d'ajustement de  $z$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à  $10^{-3}$  près) et tracer la droite  $d$  dans le repère précédent.
  - b. En déduire une relation entre  $y$  et  $x$  de la forme  $y = A \times k^x$ . (arrondir  $A$  à l'entier près et  $k$  à  $10^{-2}$  près)
4.
  - a. Tracer la droite  $d$  dans le même repère que celui du nuage de points  $(N_i)$ .
  - b. Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
  - c. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros?

## EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique



Les courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note  $\mathcal{D}_2$  le domaine délimité par les courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 3$ .

On note  $\mathcal{D}'_2$  le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{H}_1$  et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 3$ .

1. Colorier les domaines  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}'_2$  d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.  
Soit  $n$  un entier naturel strictement positif. On note  $u_n$  l'aire du domaine  $\mathcal{D}_n$  délimité par les courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  et les droites d'équation  $x = n$  et  $x = n + 1$ .
2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
On pourra comparer les nombres  $n(n + 2)$  et  $(n + 1)^2$ .

4. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
5. Déterminer la plus grande valeur de  $n$  telle que l'aire du domaine  $\mathcal{D}_n$  reste supérieure à  $\frac{1}{10}$  d'unité d'aire. Soit  $N$  cette valeur.
6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = N$ .

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.

**Barème :** Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

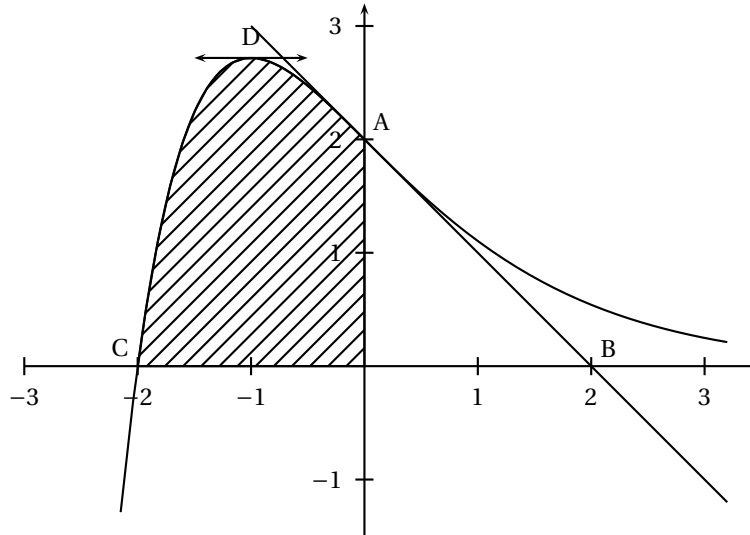
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

**COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE**

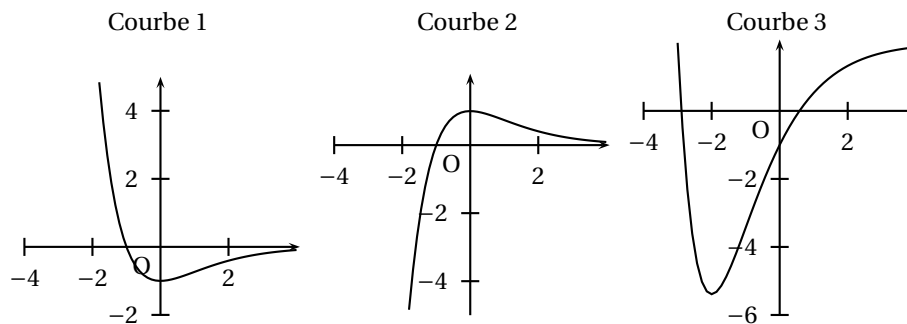
QUESTIONS	RÉPONSES
<p>1. Soit une série statistique à deux variables <math>(x; y)</math>. Les valeurs de <math>x</math> sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de <math>y</math> en <math>x</math> par la méthode des moindres carrés est <math>y = 1,35x + 22,8</math>. Les coordonnées du point moyen sont :</p>	<input type="checkbox"/> (6,5 ; 30,575) <input type="checkbox"/> (32, 575 ; 6,5) <input type="checkbox"/> (6,5 ; 31,575)
<p>2. <math>(u_n)</math> est une suite arithmétique de raison <math>-5</math>. Laquelle de ces affirmations est exacte ?</p>	<input type="checkbox"/> Pour tout entier $n$ , $u_{n+1} - u_n = 5$ <input type="checkbox"/> $u_{10} = u_2 + 40$ <input type="checkbox"/> $u_3 = u_7 + 20$
<p>3. L'égalité <math>\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)</math> est vraie</p>	<input type="checkbox"/> Pour tout $x$ de $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ <input type="checkbox"/> Pour tout $x$ de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ . <input type="checkbox"/> Pour tout $x$ de $]1; +\infty[$
<p>4. Pour tout réel <math>x</math>, le nombre <math>\frac{e^x - 1}{e^x + 2}</math> égal à :</p>	<input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$
<p>5. On pose <math>I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx</math> et <math>J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx</math> alors le nombre <math>I - J</math> est égal à</p>	<input type="checkbox"/> $\ln \frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/> $\ln \frac{3}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{3}{2}$
<p>6. L'ensemble des solutions de l'inéquation <math>\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x \leq 0,5</math> est</p>	<input type="checkbox"/> $S = \left[ -\infty; \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)} \right[$ <input type="checkbox"/> $S = \left[ \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}; +\infty \right[$ <input type="checkbox"/> $S = \left[ \ln \frac{0,5}{0,98}; +\infty \right[$

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

On a représenté ci-dessous la courbe représentative  $\Gamma$ , dans un repère orthonormal, d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . La courbe  $\Gamma$  passe par les points  $A(0; 2)$  et  $C(-2; 0)$  et la droite  $(AB)$  est la tangente en  $A$  à  $\Gamma$ . La tangente à  $\Gamma$  en son point  $D$  d'abscisse  $-1$  est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  et une autre représente une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



Déterminer la courbe associée à la fonction  $f'$  et celle qui est associée à la fonction  $F$ .

*Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix*

2. **a.** Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de  $f(0)$  et de  $f'(0)$ .
- b.** On suppose que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = (x+K)e^{\alpha x}$  où  $K$  et  $\alpha$  sont des constantes réelles.  
Calculer  $f'(x)$ , puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues  $K$  et  $\alpha$ .  
En déduire que  $f$  est définie par  $f(x) = (x+2)e^{-x}$ .
3. **a.** Montrer que la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$  est une primitive de  $f$ .
- b.** En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.  
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.