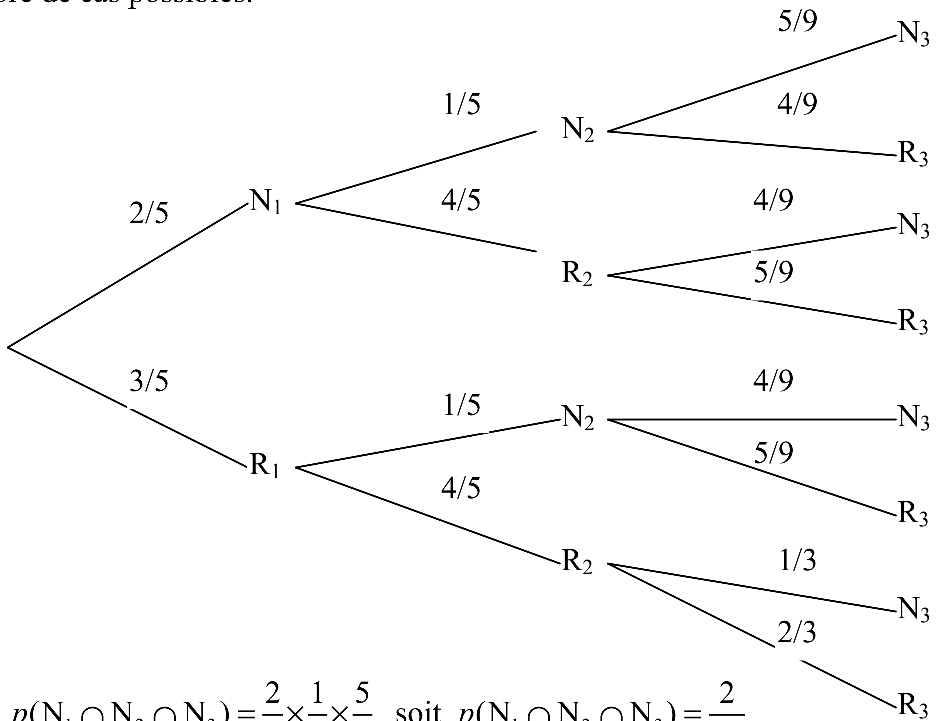
Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S de la Réunion 2005

Exercice 1

1) Les propositions b) et c) sont vraies
2) Les propositions b) et d) sont vraies
3) Les propositions b) et d) sont vraies
4) Les propositions b) et d) sont vraies

Exercice 2 - Obligatoire

Dans chaque urne, les tirages sont effectués au hasard ; on peut considérer qu'ils sont équiprobables. La probabilité d'un évènement est le rapport du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.



2) a) $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{9}$ soit $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3})=\frac{2}{45}$

$p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3})=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}$ soit $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3})=\frac{32}{225}$

b) $\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3}$ est la réunion disjointe de $\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3}$ et $\mathrm{N_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3}$

D'où $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3})=p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3})+p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3})$, soit $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3})=\frac{14}{75}$.

c) Comme dans la question précédente :

$\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3}$ est la réunion disjointe de $\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3}$ et $\mathrm{R_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3}$

D'où $p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3})=p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_2}\cap\mathrm{N_3})+p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{R_2}\cap\mathrm{N_3})$, soit $p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3})=\frac{16}{75}$.

3) $\mathrm{N_3}$ est la réunion disjointe de $\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3}$ et $\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3}$

D'où $p(\mathrm{N_3})=p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3})+p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3})$, soit $p(\mathrm{N_3})=\frac{2}{5}$.

4) $p(\mathrm{N_1})\times p(\mathrm{N_3})=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ et $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3})=\frac{14}{75}$

donc $p(\mathrm{N_1}\cap\mathrm{N_3})\neq p(\mathrm{N_1})\times p(\mathrm{N_3})$. $\mathrm{N_1}$ et $\mathrm{N_3}$ ne sont pas indépendants.

5) $p_{\mathrm{N_3}}(\mathrm{R_1})=\frac{p(\mathrm{R_1}\cap\mathrm{N_3})}{p(\mathrm{N_3})}$. On obtient : $p_{\mathrm{N_3}}(\mathrm{R_1})=\frac{8}{15}$.

Exercice 3

1) a) Pour tout x de **R**, $f(-x)f'(x)=1$. En changeant x en $-x$ on obtient, pour tout x de **R**, $f(x)f'(-x)=1$. En particulier, le produit $f(x)f'(-x)$ n'est jamais nul donc f ne s'annule pas sur **R**.

b) f étant dérivable sur **R**, $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur **R** par composition. Par suite g est dérivable sur **R** comme produit de deux fonctions dérivables sur **R**.

On a : $g'(x)=-f'(-x)f(x)+f(-x)f'(x)$

Or $f(-x)f'(x)=1$ et $f(x)f'(-x)=1$ en changeant x en $-x$

D'où $g'(x)=0$, pour tout x de **R**.

c) g' est nulle sur l'intervalle **R** donc g est une fonction constante sur **R**.

Or $g(0)=f(0)\times f(0)=16$ donc g est la fonction constante égale à 16.

d) Soit x un réel. D'après les questions précédentes, on a : $f(-x)f(x)=16$ et f ne s'annule pas sur **R** d'où $\dfrac{1}{f(-x)}=\dfrac{f(x)}{16}$. Or $\dfrac{1}{f(-x)}=f'(x)$ d'après la condition (C) donc $f'(x)=\dfrac{f(x)}{16}$.

Conclusion : pour tout x de **R**, $f'(x)=\dfrac{f(x)}{16}$. f est solution de l'équation différentielle $y'=\dfrac{y}{16}$.

De plus : $f(0)=-4$ d'après les hypothèses de (C).

2) Soit f une solution de l'équation différentielle (E). Considérons la fonction h définie sur **R** par $h(x)=f(x)e^{-\frac{x}{16}}$. h est dérivable sur **R** comme produit de deux fonctions dérivables sur **R**.

$h'(x)=f'(x)e^{-\frac{x}{16}}-\dfrac{1}{16}f(x)e^{-\frac{x}{16}}=e^{-\frac{x}{16}}\left[f'(x)-\dfrac{1}{16}f(x)\right]=0$ car f vérifie l'équation différentielle (E)

h' est donc nulle sur l'intervalle **R**. Par suite, h est une fonction constante sur **R** : pour tout x de **R**, $h(x)=K$, K étant une constante réelle. Soit $f(x)=Ke^{\frac{x}{16}}$, avec K réel.

Réciproquement : soit K un réel. La fonction $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ est solution de (E). En effet, $f'(x)=K\times\dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{16}}=\dfrac{1}{16}f(x)$.

b) Notons $f_K : x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$.

$f_K(0)=-4 \Leftrightarrow Ke^0=-4 \Leftrightarrow K=-4.$

La fonction $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique solution de (E) prenant la valeur -4 en 0.

3) D'après les questions précédentes : si f est une fonction dérivable sur **R** satisfaisant la condition (C) alors f est la fonction $x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$.

Réciproquement : montrons que $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est dérivable et satisfait la condition (C).

- f est une fonction exponentielle donc dérivable sur **R** ; sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}$.
- $f(0)=-4$
- pour tout x de R, on a : $f(-x)f'(x)=-4e^{\frac{x}{16}}\times-\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}=1\times e^0=1$.

Conclusion : $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction dérivable sur R satisfaisant la condition (C).

Exercice 4

Partie A : supposons que les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont sécantes en un point E.

On a : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EH})\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DC}$

Or la droite (BE) est la hauteur issue de B du tétraèdre ABCD donc (BE) est perpendiculaire au plan (ADC). Par suite, (BE) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan (ADC). En particulier (BE) est orthogonale à (DC) d'où $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

De même, la droite (EH) est la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD donc (EH) est perpendiculaire au plan (BCD). Par suite, (EH) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan (BCD). En particulier (EH) est orthogonale à (DC) d'où $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

Finalement :

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ soit $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ donc (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B : $\overrightarrow{BC}(10\,;-4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{BD}(-5\,;-6\,;\,-2)$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas proportionnelles donc les points B, C et D ne sont pas alignés ; ils définissent bien un plan.

$-2\times(-6)-3\times1+4\times1-13=12-3+4-13=0$

$-2\times4-3\times(-3)+4\times3-13=-8+9+12-13=0$

$-2\times(-1)-3\times(-5)+4\times(-1)-13=2+15-4-13=0$

Les coordonnées des points B, C et D vérifient l'équation : $-2x-3y+4z-13=0$ donc cette équation est bien une équation cartésienne du plan (BCD).

b) (AH) est la droite passant par A(3 ; 2 ; -1) dirigée par le vecteur $\vec{n}(-2\,;-3\,;\,4)$ normal à (BCD).

Une représentation paramétrique de la droite (AH) est : $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-3t \\ z=-1+4t \end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$.

Le point H appartenant à la fois à la droite (AH) et au plan (BCD) correspond au paramètre t vérifiant : $-2\times(3-2t)-3\times(2-3t)+4\times(-1+4t)-13=0$, soit $t=1$.

Les coordonnées de H sont (1 ; -1 ; 3).

c) On a $\overrightarrow{BH}(7\,;-2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{CD}(-5\,;-2\,;\,-4)$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=7\times(-5)+(-2)\times(-2)+2\times(-4)$, soit $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=-39$.

Par suite, (BH) n'est pas une hauteur du triangle BCD donc les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B ne sont pas sécantes d'après la partie A.

2) Les hauteurs issues des points I, J et K du tétraèdre OIJK sont respectivement les droites (OI), (OJ) et (OK). De plus la hauteur issue de O du tétraèdre passe évidemment par O !

Le tétraèdre OIJK est donc orthocentrique.

Exercice 5

La fonction $u: x\mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc $f=\ln u$ est dérivable sur $[0;+\infty[$. Pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme des fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto -1$ dérivables sur $[0;+\infty[$. Pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $g'(x)=e^x$.

On a $f(0)=g(0)=0$ et $f'(0)=g'(0)=1$ donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent au point d'abscisse 0 des tangentes passant par le même point O(0 ; 0) et ayant le même coefficient directeur 1.
La droite d'équation $y=x$ est une tangente commune aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point O(0 ; 0).

Position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)-x$.
Notons h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$.
h est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme des fonctions f et $x\mapsto -x$, dérivables sur $[0;+\infty[$.
$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$.
$h'(0)=0$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, $h'(x)<0$ donc h est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
De plus $h(0)=0$ donc h est négative sur $[0;+\infty[$.
Conclusion : la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite Δ d'équation $y=x$ sur $[0;+\infty[$.

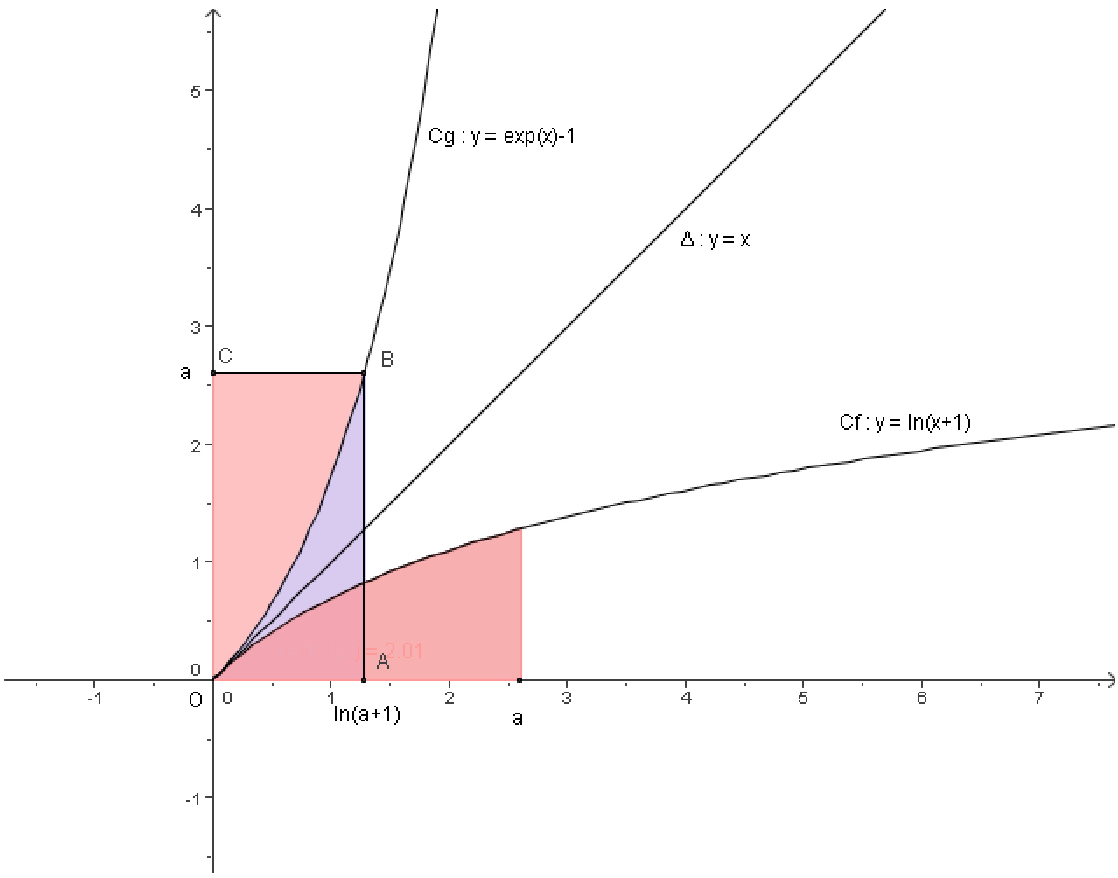
2) M(x ; y) et M′(y ; x) sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
En posant $y=\ln(x+1)$, on a les équivalences : $x\geq 0 \Leftrightarrow x+1\geq 1 \Leftrightarrow \ln(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 0$.
Par suite :
M(x ; y) $\in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y=\ln(x+1)$ et $x\geq 0 \Leftrightarrow e^y=x+1$ et $y\geq 0 \Leftrightarrow$ M′(y ; x) $\in \mathcal{C}_g$
Ce qui prouve que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite Δ.

Une autre méthode consiste à montrer que f et g sont des bijections réciproques en vérifiant que :
- pour tout $x \geq 0$, $(f\circ g)(x)=x$
- pour tout $y \geq 0$, $(g\circ f)(y)=y$

3) Sur $[0;+\infty[$, f est une fonction continue car dérivable et positive donc $\int_0^a f(x)dx$ est l'aire, en unités d'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$.
Par symétrie d'axe Δ (conservation des aires), $\int_0^a f(x)dx$ est aussi l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}_g$, la droite d'équation $y=a$, les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(a+1)$.

Or cette dernière aire, en unités d'aire, s'obtient par différence :
(aire du rectangle OABC) – (aire sous la courbe $\mathcal{C}_g$ entre 0 et ln(a + 1)) $=a\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}(e^x-1)dx$.
A, B et C étant respectivement les points de coordonnées (ln(a + 1) ; 0), (ln(a + 1) ; a) et (0; a).
b) $\int_0^a f(x)dx=a\ln(a+1)-[e^x-x]_0^{\ln(a+1)}=a\ln(a+1)-(a+1-\ln(a+1)-1)$
soit, $\int_0^a f(x)dx=(a+1)\ln(a+1)-a$.

c) Notons $u:x\mapsto \ln(x+1)$ et $v:x\mapsto x+1$.
u et v sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et leurs dérivées $u':x\mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $v':x\mapsto 1$ sont continues sur $[0;+\infty[$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :
$\mathrm{I}(a)=\int_0^a 1\times\ln(x+1)dx=\int_0^a v'(x)u(x)dx=\left[v(x)u(x)\right]_0^a-\int_0^a v(x)u'(x)dx$
$\mathrm{I}(a)=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^a-\int_0^a 1dx=(a+1)\ln(a+1)-\left[x\right]_0^a$, soit $\mathrm{I}(a)=(a+1)\ln(a+1)-a$.



Exercice 2 – spécialité

1) Notons P_n la propriété : "$S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$".

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n > 0$.

Initialisation : P_1 est vraie car $S_1 = \sum_{p=1}^{1} p^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.

Hérédité : supposons que P_n est vraie pour un entier $n > 0$ et montrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie.

Hypothèse de récurrence : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $n > 0$.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

d'où $S_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$, soit P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle vraie pour tout entier $n > 0$.

2) a) $\text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = \text{PGCD}(\left(\dfrac{2k(2k+1)}{2}\right)^2, \left(\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2)$

$= \text{PGCD}((k(2k+1))^2, ((2k+1)(k+1))^2) = (2k+1)^2\,\text{PGCD}(k^2, (k+1)^2)$

Rappelons la propriété : si a, b et k sont trois entiers naturels alors $\text{PGCD}(ka, kb) = k \times \text{PGCD}(a, b)$.

b) $\text{PGCD}(k, k+1) = 1$.

En effet, $(k+1) - k = 1$ donc k et $k+1$ sont premiers entre eux d'après le théorème de Bezout.

c) D'après la question a), pour tout entier naturel k non nul :

$\text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \text{PGCD}(k^2, (k+1)^2)$

Comme $\text{PGCD}(k, k+1) = 1$, on a $\text{PGCD}(k^2, (k+1)^2) = 1$ d'après la propriété citée dans l'introduction.

D'où $\text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2$.

3) Soit k un entier naturel.

a) $(2k+3) - (2k+1) = 2$. Le PGCD de $(2k+1)$ et $(2k+3)$ divise toute combinaison linéaire de $(2k+1)$ et $(2k+3)$ donc divise 2. $\text{PGCD}((2k+3),(2k+1))$ est égale à 1 ou 2. Or $(2k+1)$ et $(2k+3)$ sont des entiers impairs donc $\text{PGCD}((2k+3),(2k+1)) = 1$.

b) $\text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = \text{PGCD}(\left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2, \left(\frac{(2k+2)(2k+3)}{2}\right)^2)$

$= \text{PGCD}(\left((2k+1)(k+1)\right)^2, \left((k+1)(2k+3)\right)^2) = (k+1)^2 \text{PGCD}(2k+1)^2, (2k+3)^2)$

Comme $\text{PGCD}(2k+1, 2k+3) = 1$, on a $\text{PGCD}((2k+1)^2, (2k+3)^2) = 1$ d'après la propriété citée dans l'introduction.

D'où $\text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = (k+1)^2$.

4) Soit n un entier naturel non nul.

- si $n = 2k$ avec k entier naturel non nul, d'après l'étude 2) :

$\text{PGCD}(S_n, S_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(S_{2k}, S_{2k+1}) = 1 \Leftrightarrow (2k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0$

k étant non nul, la dernière proposition est fausse. Par suite, il n'existe de pas d'entier naturel pair non nul n tel que S_n et S_{n+1} soit premiers entre eux.

- si $n = 2k+1$ avec k entier naturel, d'après l'étude 3) :

$\text{PGCD}(S_n, S_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \text{PGCD}(S_{2k+1}, S_{2k+2}) = 1 \Leftrightarrow (k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow n = 1$

1 est la seule valeur de n qui est telle que S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.