CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1 *(4 points)*
Commun à tous les candidats

0,5 point — 1. *a.* f est le quotient de deux fonctions continues définies sur un intervalle où le dénominateur ne prend pas la valeur 0.

0,75 point — *b.* f est croissante sur $[1,+\infty[$ car elle est dérivable et sa dérivée, définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $f'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$, est positive.

0,25 point — 2. *a.* $A(1)=0$.

1 point — *b.* Les nombres $hf(x_0)$ et $hf(x_0+h)$ sont les aires de deux rectangles de même largeur. Ils encadrent l'aire sous la courbe comprise entre les verticales d'équations $x=x_0$ et $x=x_0+h$, qui s'exprime par la différence $A(x_0+h)-A(x_0)$. Ce résultat est dû à la croissance de f.

0,75 point — *c.* La continuité de la fonction f et le théorème d'encadrement sur les limites donnent le résultat : la fonction $h\mapsto\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}$, définie pour $h>0$, admet en 0 la limite $f(x_0)$. La fonction A est donc dérivable à droite en 0, de nombre dérivé $f(x_0)$.

0,5 point — *d.* On obtient de même, dans les conditions indiquées, l'encadrement :

$$f(x_0+h)\leqslant\frac{A(x_0)-A(x_0+h)}{h}\leqslant f(x_0).$$

0,25 point — *e.* On conclut que la fonction A est dérivable à gauche en 0, de nombre dérivé $f(x_0)$. La fonction A est donc dérivable en 0, et son nombre dérivé est $f(x_0)$

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

0,5 point — 1. Le centre du cercle (C) est le milieu de [AB] ; son affixe est $-\dfrac{1}{2}$. Le rayon du cercle est la moitié de AB, c'est-à-dire $\dfrac{5}{2}$.

0,75 point + 0,5 point — 2. On trouve : $z_D=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$. La distance de D à Ω est $\dfrac{5}{2}$.

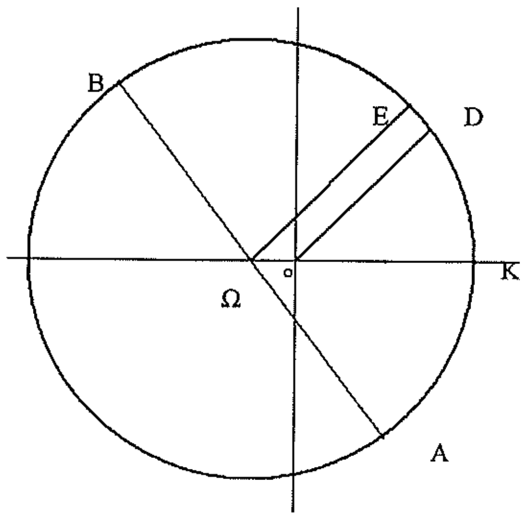
0,5 point — 3. *a.* Un argument de $z_E+\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{\pi}{4}$, et le module de $z_E+\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{5}{2}$.

0,5 point — *b.* On écrit $z_E + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, qui est une autre expression du résultat demandé.

0, 5 point — 4..*a.* r est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$

0,5 point (géométrie) + 0,5 point — *b.* L'image de K est E. On le prouve par le calcul et, géométriquement, par le fait que K et son image K' sont sur un même cercle de centre Ω, donc sur (C) et qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega K'}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$. On a donc K'=E.

Figure : 0,75 point



Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

0,75 point — 1. Il faut faire le calcul.

0,5 point — 2. *a.* L'ensemble des points invariants par f est obtenu par exemple en résolvant le système $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$, dont la solution est l'ensemble des couples (x, y) satisfaisant : $2x - 4y - 1 = 0$.

L'ensemble des points invariants par f est donc la droite d'équation $2x - 4y - 1 = 0$.

0,75 point — *b.* La similitude indirecte f (son écriture complexe est en effet de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$) possède une droite de points invariants : c'est la symétrie par rapport à la droite ensemble de ses invariants.

0,75 point — 3. L'ensemble D s'obtient en résolvant l'équation $y' = 0$. L'ensemble D est donc la droite d'équation $4x - 3y - 2 = 0$.

0,25 point — 4. *a.* On peut prendre par exemple $(2,2)$.

1 point — *b.* Les couples (x, y) solutions sont caractérisés par l'égalité $4(x-2) = 3(y-2)$. Les entiers 3 et 4 étant premiers entre eux, on en déduit que les couples (x, y) solutions sont ceux pour lesquels il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} x = 2 + 3k \end{cases}$

1 point

ceux pour lesquels il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} x = 2+3k \\ y = 2+4k \end{cases}$.

5. En calculant les coordonnées x' et y' d'un point du plan d'abscisse 1, on trouve : $\begin{cases} x' = \dfrac{4y+4}{5} \\ y' = \dfrac{2-3y}{5} \end{cases}$. Dire que ces coordonnées sont des entiers c'est dire que les entiers $4y+4$ et $2-3y$ sont des multiples de 5. Dire que $4y+4$ est multiple de 5 c'est dire qu'il existe un entier relatif k tel que $y+1=5k$. Pour un tel y, on trouve que $2-3y = 2-3(5k-1)$, c'est-à-dire $2-3y = 5(1-3k)$. $2-3y$ est donc un multiple de 5.

Conclusion : Les entiers y cherchés sont ceux pour lesquels il existe un entier relatif k tel que $y = 5k-1$.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

0,5 points

1. *a.* Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(0,1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$ ne sont pas colinéaires.

0,5 point + 0,5 point

b. On calcule les produits scalaires ; ils sont nuls. Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC), dont une équation cartésienne est donc : $3x+4y-2z+m=0$. On détermine la valeur de m en écrivant que, par exemple, A est un point du pan. On obtient : $3\times1+4\times0-2\times2+m=0$, donc $m=1$ et une équation du plan (ABC) est $3x+4y-2z+1=0$.

0,5 point

2. *a.* On peut considérer les vecteurs $\vec{v}(2,1,2)$ et $\vec{w}(1,-2,6)$, normaux respectivement à P_1 et P_2. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Ils sont sécants.

0,75 point

On peut écrire un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection en prenant z comme paramètre (ce sera t dans la suite pour distinguer les rôles de ces lettres muettes). On trouve qu'un point M appartient à la droite D si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées x, y et z de M vérifient :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} - 2t \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2t \\ z = t \end{cases}$$ (il y a bien d'autres écritures possibles…)

0,5 point

b. On a : $3\left(-\dfrac{2}{5}-2t\right)+4\left(-\dfrac{1}{5}+2t\right)-2t+1=-1$

Aucun point de D n'est dans (ABC). Le plan et la droite sont strictement parallèles.

0,25 point

3. *a.* Pour tout réel positif t, la somme $3+t$ est non nulle.

0,5 point

0,5 point

G est le barycentre du système $\left((\mathrm{I},3),(\mathrm{C},t)\right)$. On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.

0,5 point

b. La fonction $t\mapsto\frac{t}{3+t}$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

On résout l'équation $\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}$. La solution est 3.

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

1 point

1. Les termes de la suite sont strictement positifs.

On peut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}$ donne le résultat demandé.

1 point

2. *a*. La fonction f est la composée d'une fonction homographique par une fonction puissance. Elle est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a, pour tout réel x de cet intervalle,

$f'(x)=10\times-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^9$. La fonction f est donc décroissante. Sa limite en $+\infty$ est 1 (théorème de composition).

0,75 point

b. Le résultat résulte de la stricte monotonie de f, l'intervalle $[1,+\infty[$ étant envoyé sur l'intervalle $]1,2^{10}]$.

0,75 point

c. On procède par essais successifs. On trouve :

$\left(1+\frac{1}{15}\right)^{10}\simeq1{,}906$

$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{10}\simeq1{,}833$.

On en déduit que 16 est l'entier n_0 cherché.

0,5 point

d. Cela résulte de la décroissance de la fonction f.

0,25 point
0,5 point

3. *a*. La suite est donc décroissante à partir du rang 16.
b. Elle est décroissante positive, donc minorée. Donc elle est convergente.

1 point

0,25 point

4. La démonstration par récurrence débute par l'étude du cas $n=16$. Après avoir posé l'hypothèse de récurrence que la propriété est vraie pour un certain n, les résultats des questions 1 et 2*d* permettent de montrer qu'elle est vraie pour son successeur $n+1$, et on conclut qu'elle est vraie pour tout $n\geqslant16$. L'encadrement obtenu montre que la suite u_n, positive et majorée par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, a pour limite 0.