BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

1. *a.* Justifier la continuité de f sur $[1,+\infty[$.
   b. Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$.

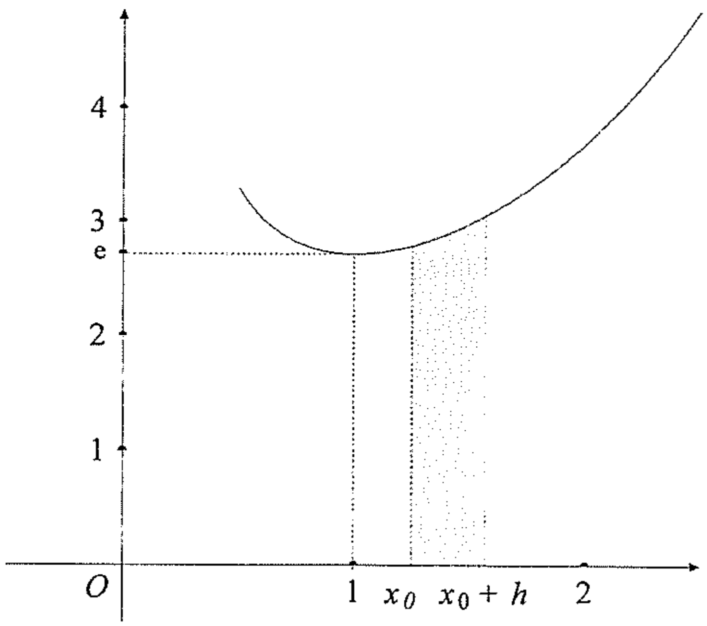
2. Restitution organisée de connaissances :

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
   Pour tout réel x_0 de $[1,+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.
   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1,+\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $A(1)$?
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1,+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leqslant \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

   c. Lorsque $x_0>1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h \geqslant 1$?
   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A.
   e. Conclure.



Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que:

$$z'=\frac{3+4i}{5}\overline{z}+\frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que : $\begin{cases} x'=\dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y'=\dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. *a.* Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z=x+iy$ tels que $x=1$ et $y\in\mathbb{Z}$. Le point $M'=f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,2)$, $(1,1,4)$ et $(-1,1,1)$.

1. *a.* Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3,4,-2)$.

   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C.

   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \textit{ si et seulement si } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1,+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha)=1,9$.

   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0-1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. *a.* Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}\, u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.