Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln x$.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations de f. Recopier ce tableau sur la copie.

a. Justifier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $\left]0~;~\sqrt{\text{e}}\right[$ et $\left]\sqrt{\text{e}}~;~+\infty\right[$.

b. Calculer la valeur exacte de $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$.

x	0		$\sqrt{\text{e}}$		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ -2	↗	$f\left(\sqrt{\text{e}}\right)$	↘	$-\infty$

2. À l'aide de ce tableau de variations, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Si ces solutions existent, donner pour chacune d'elles la valeur décimale approchée arrondie au dixième (aucune justification n'est demandée).

3. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si chacune des affirmations suivantes est **vraie** ou **fausse** :

a. La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. Toute primitive de f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0~;~\sqrt{\text{e}}\right[$

EXERCICE 2 — 5 points

(pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Lors d'un examen, Julien doit répondre un Q.C.M.

À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.

On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse une question donnée est égale $\dfrac{1}{2}$.

On note C l'évènement « Julien connaît la réponse »,

E l'évènement « la réponse est exacte ».

Rappel de notation : pour un évènement A donné, $p(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A et $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. **a.** Julien répond une question du Q.C.M.
Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Démontrer que : $p(\text{E}) = \dfrac{2}{3}$.

c. Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse la question sachant que sa réponse est exacte.

2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien ce Q.C.M.«
   a. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
   b. Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point ce Q.C.M. ?
   c. En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre ce Q.C.M. ?

EXERCICE 2 — 5 points

(pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

1. On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année $2000+n$ (n entier supérieur ou égal 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire.
   La matrice $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.
   a. Représenter la situation l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
   b. Calculer l'état probabiliste P_1.
   c. Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M}$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.
   b. Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.
   c. Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1. c.

EXERCICE 3 — 5 points

(commun à tous les candidats)

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe 1, est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente cette courbe au point de coordonnées $(0\,;\,2)$. On appelle α la valeur de la variable x pour laquelle f admet un maximum noté M : $M = f(\alpha)$ (la valeur de α n'est pas demandée).
On précise que $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$ sont des nombres entiers.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. f' désigne la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x sur l'intervalle $[-6\,;\,2]$.
2. Soit g la fonction définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,2[$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$ et g' sa fonction dérivée.

a. En utilisant notamment des résultats obtenus par lecture graphique de la courbe $(\mathscr{C})$, dresser le tableau de variations de g et déterminer la limite de g en 2.

b. Déterminer $g'(0)$.

Partie B

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, F' désigne la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'aide du graphique $F'(-1)$ et $F'(2)$.

2. On admet qu'il est possible de trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $F(x) = \left(ax^2 + bx - 1\right)\mathrm{e}^x$.

a. Exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de a et b.

b. En utilisant les résultats trouvés la question 1 de la **partie B**, démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \left(-x^2 + 3x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

c. Calculer $F(2) - F(-1)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 4 **5 points**

(commun à tous les candidats)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 2000.

On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 â 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.

y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année X_i.

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267

Source : Insee, bilan démographique. Champ : France métropoIitaine.

1. Estimation à l'aide d'un graphique semi-logarithmique

a. Compléter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé cette série statistique dans le repère semi-logarithmique fourni en annexe 2.

b. Construire sur ce graphique la droite passant par les points $\mathrm{M}_1(0\ ;\ 201)$ et $\mathrm{M}_{11}(50\ ;\ 1\,267)$ et justifier que l'ajustement du nuage l'aide de cette droite est satisfaisant.

c. En supposant que cet ajustement affine reste pertinent, déterminer graphiquement partir de quelle année le nombre de personnes âgées de plus de 85 ans dépassera 2 millions.

2. La forme du nuage obtenu avec la représentation logarithmique invite chercher un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$.

a. Compléter la dernière ligne du tableau fourni en annexe. Arrondir les résultats au millième.

b. En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au millième.

c. En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$. (Le réel A sera arrondi l'unité et le réel B au millième)

3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par : $f(x) = 200\mathrm{e}^{0,037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.

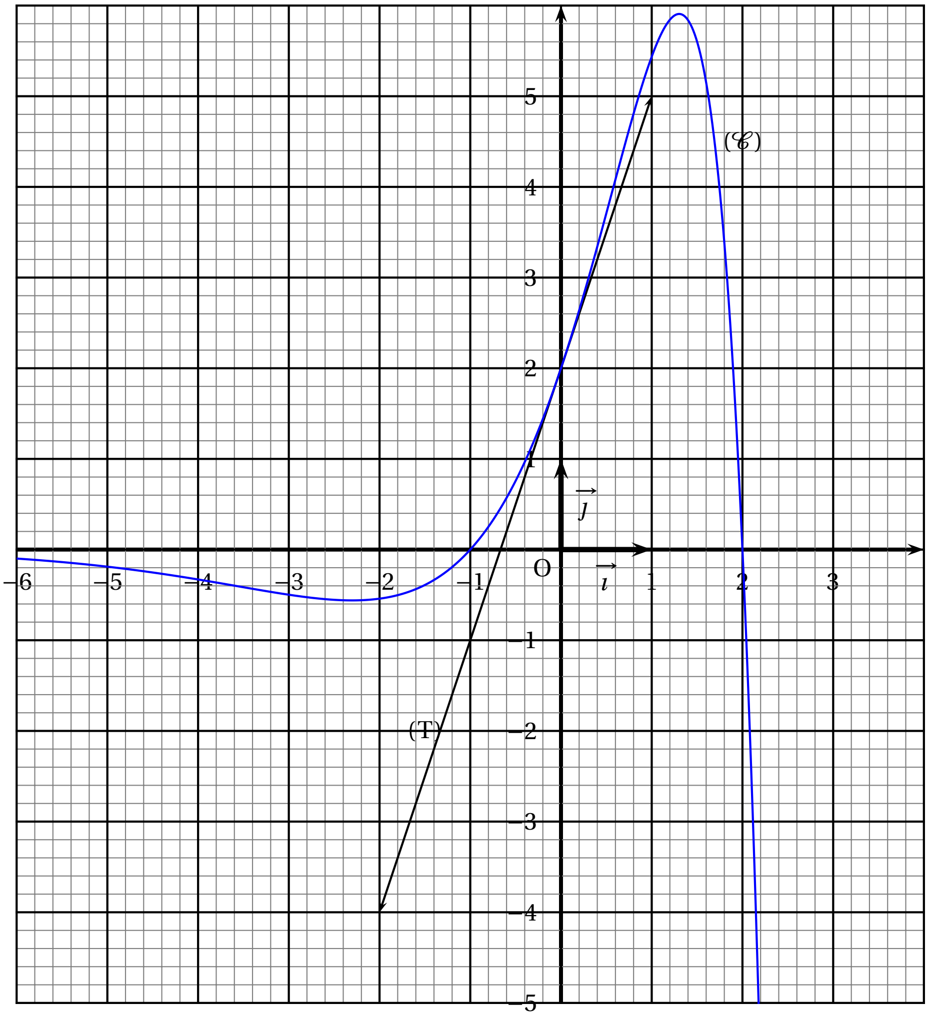
a. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2\,000$ et interpréter ce résultat.

b. Calculer la valeur décimale approchée arrondie au millième de

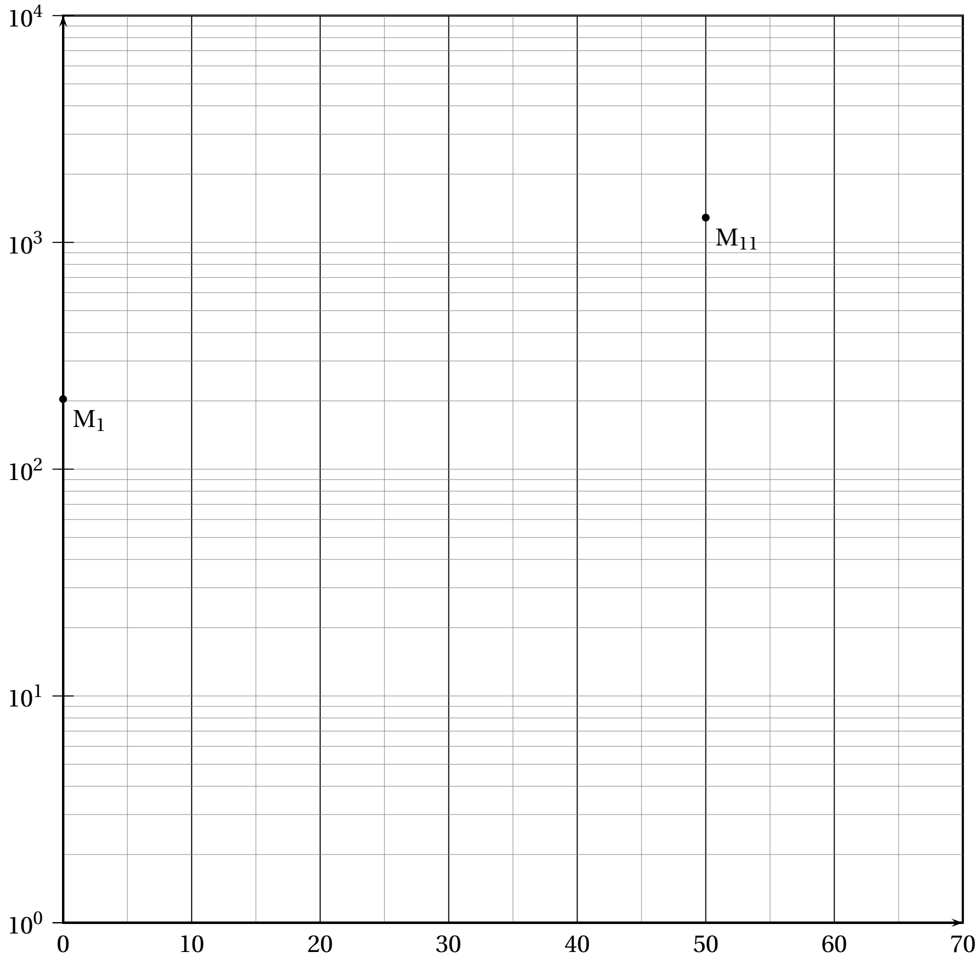
$$\frac{1}{50}\int_0^{50} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Que représente ce résultat pour la population étudiée ?

Annexe 1 – Exercice 3 (à remettre avec la copie)



Annexe 2 – Exercice 4 (à remettre avec la copie)



X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267
$z_i = \ln y_i$											