∽ Baccalauréat ES Pondichéry 3 avril 2006 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

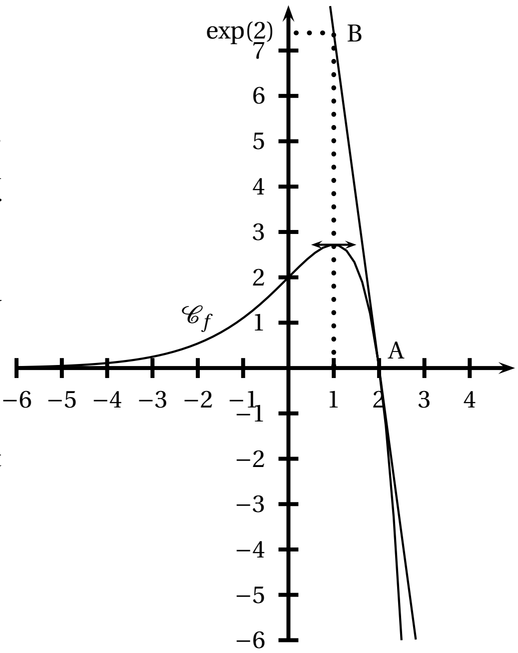
Commun à tous les candidats

La courbe ci-contre $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{5}{2}\right]$.

On note f' sa fonction dérivée et F la primitive de f qui vérifie : $F(1) = 2\text{e}$.

On précise :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$.
- La tangente à la courbe au point A(2 ; 0) passe par le point B $\left(1\ ;\ \text{e}^2\right)$.
- $F(-3) = \dfrac{6}{\text{e}^3}$.



Pour chacune des huit affirmations, précisez sur votre copie si elle est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée et il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé).

Barème : À chaque question est attribué 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif il est ramené à zéro.*

Affirmation 1 Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 2]$, $f'(x) \geqslant 0$.	**Affirmation 5** $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\text{d}x = -2$
Affirmation 2 Le nombre dérivé en 2 de la fonction f est égal à e^2.	**Affirmation 6** La fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie sur $]-\infty\ ;\ 2]$.
Affirmation 3 La fonction F présente un maximum en 2.	**Affirmation 7** La limite de la fonction $\dfrac{1}{f}$ en $-\infty$ est $+\infty$.
Affirmation 4 L'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -3$ et $x = 1$ est égale (en unité d'aire) à $\dfrac{2\text{e}^4 - 6}{\text{e}^3}$	**Affirmation 8** La courbe représentative de la fonction $\dfrac{1}{f}$ présente une asymptote d'équation $x = 2$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour passer le temps, Chloé et Margaux inventent un jeu avec leur paquet de 32 cartes à jouer et un paquet de bonbons.

On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (pique, trèfle, cour, carreau) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

Margaux propose la règle suivante :

- On tire une carte, on regarde si c'est un roi. Sans remettre la carte dans le paquet, on tire une seconde carte et on regarde si c'est un roi.
- Si, sur les deux cartes, on a tiré exactement un roi, on gagne 10 bonbons ; si on a tiré deux rois, on gagne 20 bonbons ; sinon, on a perdu !

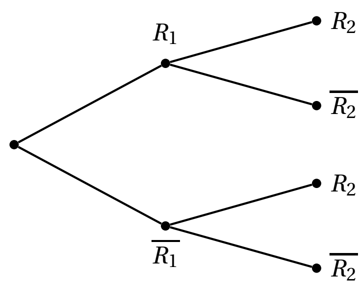
On note :

R_1 l'évènement « tirer un roi au premier tirage » et $\overline{R_1}$ son évènement contraire,
R_2 l'évènement « tirer un roi au deuxième tirage » et $\overline{R_2}$ son évènement contraire.

1. Justifier les valeurs des probabilités suivantes :

$$P(R_1) = \frac{1}{8} \qquad P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31} \qquad P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}.$$

2. On traduit le jeu par un arbre pondéré. Reproduire l'arbre ci-dessous en inscrivant les probabilités, en écriture fractionnaire sur chaque branche.



Dans ce qui suit, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au millième.

3. Calculer la probabilité des évènements :

A « tirer un roi au premier tirage et au deuxième tirage » ;

B « tirer un roi à un seul des deux tirages »

4. On s'intéresse au nombre X de bonbons gagnés après deux tirages.
Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X.

Nombre de bonbons x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$		0,226	

5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au dixième.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.

L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel n, on note pour la saison $(2005 + n)$:

- a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),
- b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),
- $P_n = (a_n \ \ b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste, avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondies à 10^{-4}.

1. **a.** Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.

   b. On note M la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & \dots \\ 0,15 & \dots \end{pmatrix}$

   c. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45 % des touristes. On a donc $a_0 = 0,45$.

   i. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.

   ii. Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

   d. Soit $P = (a \;\; b)$ avec a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$.

   i. Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.

   ii. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

   iii. Interpréter ce résultat.

   e. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\dfrac{3}{7}$. On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres.
   Determiner la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

EXERCICE 3 — **4 points**

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée ln.

Propriété fondamentale :
Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Rappels

On rappelle les résultats de cours suivants, auxquels le candidat fera clairement référence pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro).

Théorème 1 : Sur un intervalle I, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 2 : Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction composée définie par $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème 3 : La somme f de deux fonctions dérivables u et v sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.

Définition $\ln 1 = 0$.

Énoncé de l'exercice

Soit a un réel constant strictement positif.
On considère les fonctions f et g, de la variable x, définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(ax) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln a + \ln x.$$

Partie 1

Dans le cas où $a = 2$, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$.

Partie 2 : démonstration de la propriété

a. Calculer et comparer les dérivées de f et de g dans le cas général où a est un réel constant strictement positif.

b. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in]0 ;\ +\infty[$, $f(x) = g(x) + k$?

c. En posant $x = 1$, déterminer la valeur de k.

d. Justifier la propriété fondamentale de la fonction ln énoncée en début d'exercice.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0 ; 9]$ par

$$f(x) = \frac{10}{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{2}.$$

1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

2. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte de I.

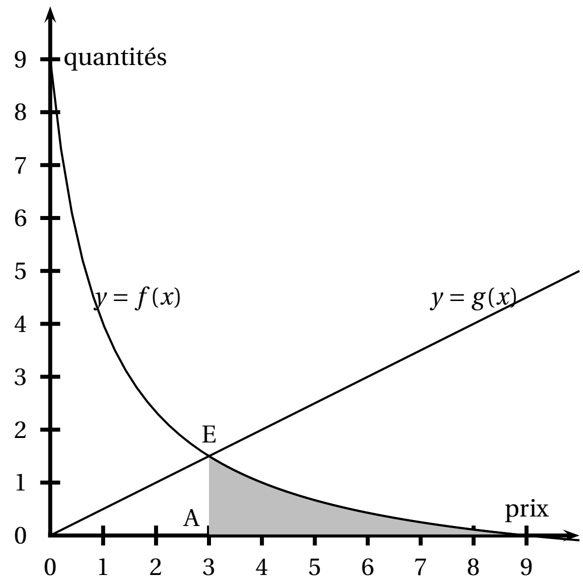
Partie 2

Un produit conditionné en boite est mis sur le marché. On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.

On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.

On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.

Sur le graphique ci-contre, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.

a. Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boite ?

b. Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.

2. **a.** D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.

   b. Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.