BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Spécialité

<u>SERIE : ES</u>

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 8 pages dont 3 feuilles ANNEXES 1, 2 et 3.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

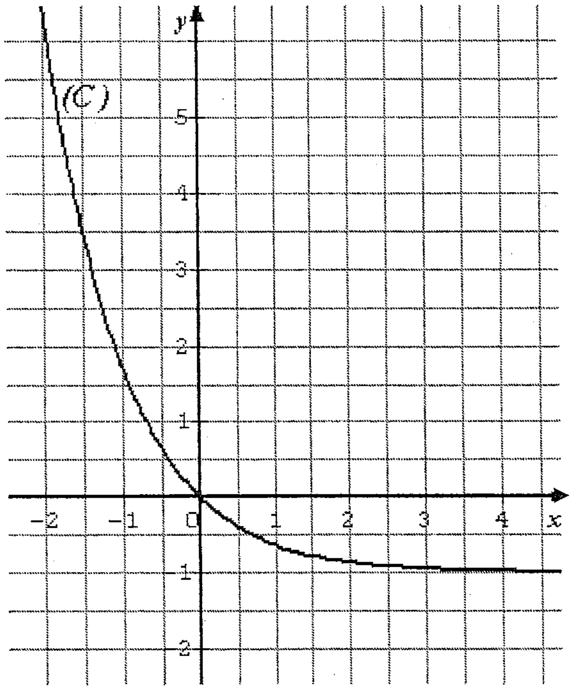
Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les ANNEXES 1, 2 et 3 sont à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats.

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = e^{-x} - 1$.
La courbe (C) donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur **R**.
On note F la primitive de la fonction f sur **R** telle que $F(0) = 0$.

Pour chacune des affirmations suivantes, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE 1, à rendre avec la copie.
Aucune justification n'est demandée.

<u>NOTATION</u> : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

a) $f(\ln 2) = -3$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

c) Pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = e^{-x}$.

d) $\int_{-1}^{0} f(x)dx > 1$.

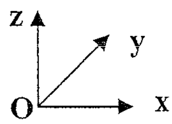
e) La fonction F est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

f) Pour tout nombre réel x, on a : $F(x) = 1 - e^{-x} - x$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



Sur la feuille fournie en ANNEXE 2, à rendre avec la copie, on a représenté la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;1{,}5]$ et y appartenant à l'intervalle $[0\,;1{,}5]$.

<u>PARTIE I</u> : Exploitation du graphique

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1) Sur la feuille donnée en **ANNEXE 2, à rendre avec la copie,** placer le point A de coordonnées (1 ; 1 ; 6).

2) Surligner en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée en **ANNEXE 2, à rendre avec la copie.**

<u>PARTIE II</u> : Recherche d'un coût minimum

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.
On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.

Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x,y) = 3(x^2 + y).$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1) La production mensuelle totale est de 2 milliers de composants : on a donc $x + y = 2$.
   Exprimer $C(x,y)$ en fonction de la seule variable x.
   On note f la fonction ainsi obtenue. Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.

2) Montrer que, sur l'intervalle [0 ; 1,5], la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0{,}5$.

3) Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?

4) Placer, sur la figure donnée en **ANNEXE 2, à rendre avec la copie**, le point K correspondant au coût minimum.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une roue de loterie comporte 3 secteurs notés A, B et C.
On lance la roue, elle tourne puis s'arrête devant un repère fixe.
Le mécanisme est conçu de telle sorte que, à l'arrêt de la roue, le repère fixe se trouve toujours devant l'un des trois secteurs, qui est alors déclaré « secteur repéré ».
On note p_1 la probabilité que le secteur A soit repéré. On donne $p_1 = 0,2$.

On note p_2 la probabilité que le secteur B soit repéré. On donne $p_2 = 0,3$.

1) Calculer la probabilité, notée p_3, que le secteur C soit repéré.

Une partie consiste à lancer la roue deux fois successivement. On s'intéresse aux couples de secteurs repérés obtenus à la suite des deux lancers successifs.
On admet que les lancers de roue successifs sont indépendants.

2) Justifier que la probabilité d'obtenir le couple de secteurs repérés (A,B) est égale à 0,06.

3) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant par les probabilités d'obtenir les différents couples de secteurs repérés possibles. Certaines probabilités sont déjà indiquées, ainsi la probabilité d'obtenir le couple (C,C) est égale à 0,25.

Secteur repéré au premier lancer / Secteur repéré au deuxième lancer	A	B	C
A	0,04		
B	0,06		
C			0,25

4) Montrer que la probabilité d'obtenir un couple de secteurs repérés ne comportant pas le secteur C est égale à 0,25.

5) De l'argent est mis en jeu dans cette partie. Le « gain » dépend du nombre de secteurs C repérés :
- obtenir 2 fois le secteur C fait gagner 8 € ;
- obtenir exactement une fois le secteur C fait gagner 1 € ;
- n'obtenir aucun secteur C fait perdre 10 €.

a) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité			0,25

b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=\mathrm{e}^x-1$ et $g(x)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^x+1}$. Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) La fonction f est représentée par la courbe (C) figurant en **ANNEXE 3, à rendre avec la copie.**

a. Donner une équation de la tangente T à cette courbe au point O origine du repère.

b. Tracer la droite T dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ donné en **ANNEXE 3, à rendre avec la copie.**

2) ***Étude de la fonction g.***

a. Calculer $g(0)$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

c. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

d. Tracer la représentation graphique (Γ) de la fonction g dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ donné en **ANNEXE 3, à rendre avec la copie.**

3) La lecture graphique montre que l'équation $f(x)=g(x)$ admet dans l'intervalle $[0;+\infty[$ une unique solution, notée m.

a. Faire figurer sur le graphique le point de coordonnées $(m, f(m))$.

b. Prouver, par le calcul, que $m=\ln 2$.

4) On considère le nombre suivant : $\mathcal{A}=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$.

a. Sur le graphique de l'**ANNEXE 3, à rendre avec la copie,** hachurer le domaine dont l'aire, en unités d'aires, est égale à $\mathcal{A}$.

b. Soit la fonction dérivable G définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $G(x)=3x-3\ln(\mathrm{e}^x+1)$.

Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c. Calculer $\mathcal{A}$.

ANNEXE 1

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

<u>À rendre avec la copie</u>

Cocher la case correspondant à votre réponse.

AFFIRMATIONS	V	F
a) $f(\ln 2) = -3$		
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$		
c) Pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = e^{-x}$		
d) $\int_{-1}^{0} f(x)dx > 1$		
e) La fonction F est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$		
f) Pour tout nombre réel x, on a : $F(x) = 1 - e^{-x} - x$		

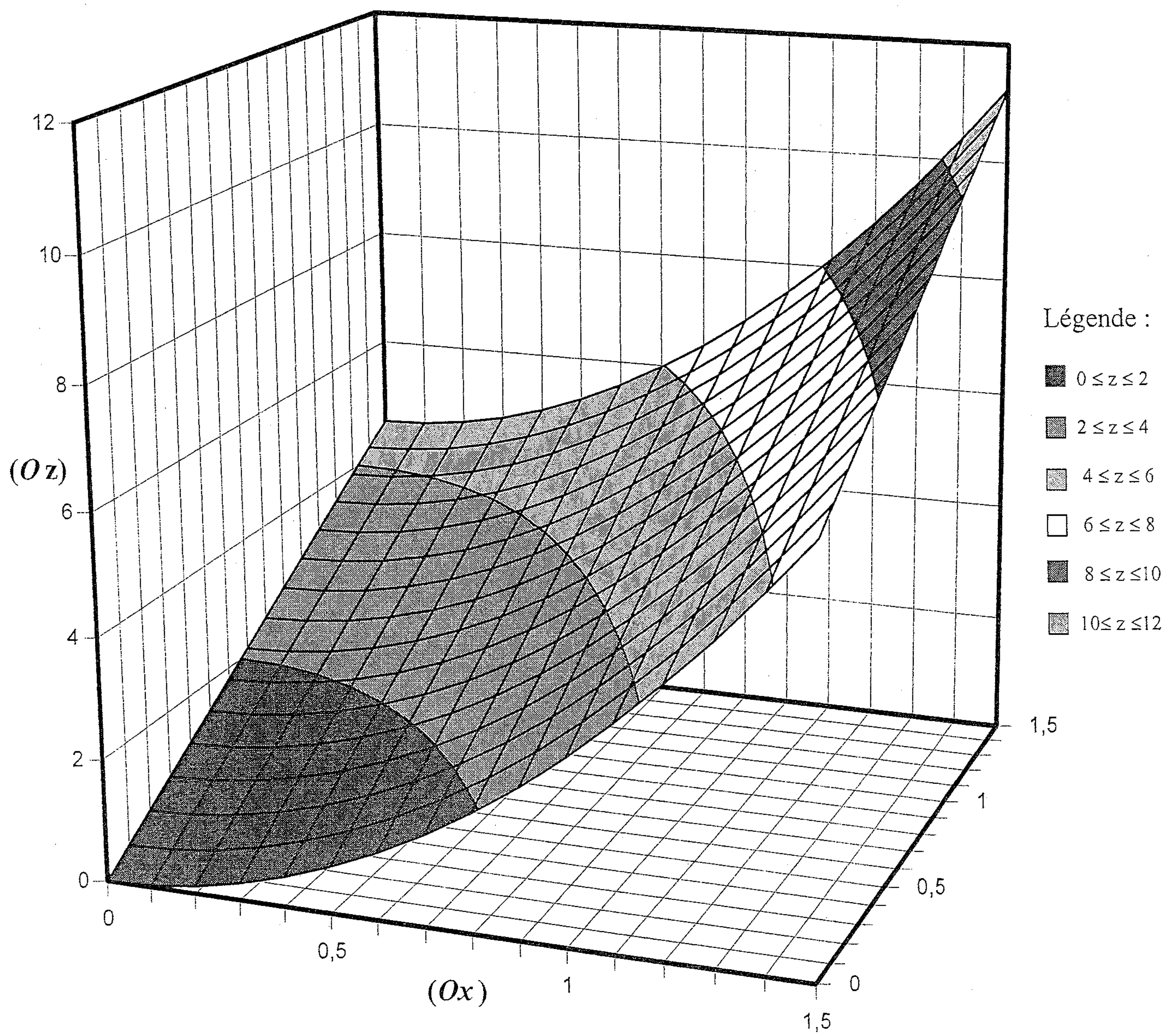
ANNEXE 2

EXERCICE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

<u>À rendre avec la copie</u>

Surface d'équation $z = 3\,(x^2 + y)$



ANNEXE 3

EXERCICE 4

Commun à tous les candidats.

À rendre avec la copie