BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

<u>SERIE : ES</u>

Spécialité

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages dont 1 feuille ANNEXE.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>La feuille ANNEXE est à rendre avec la copie.</u>

EXERCICE 1 (3 points)

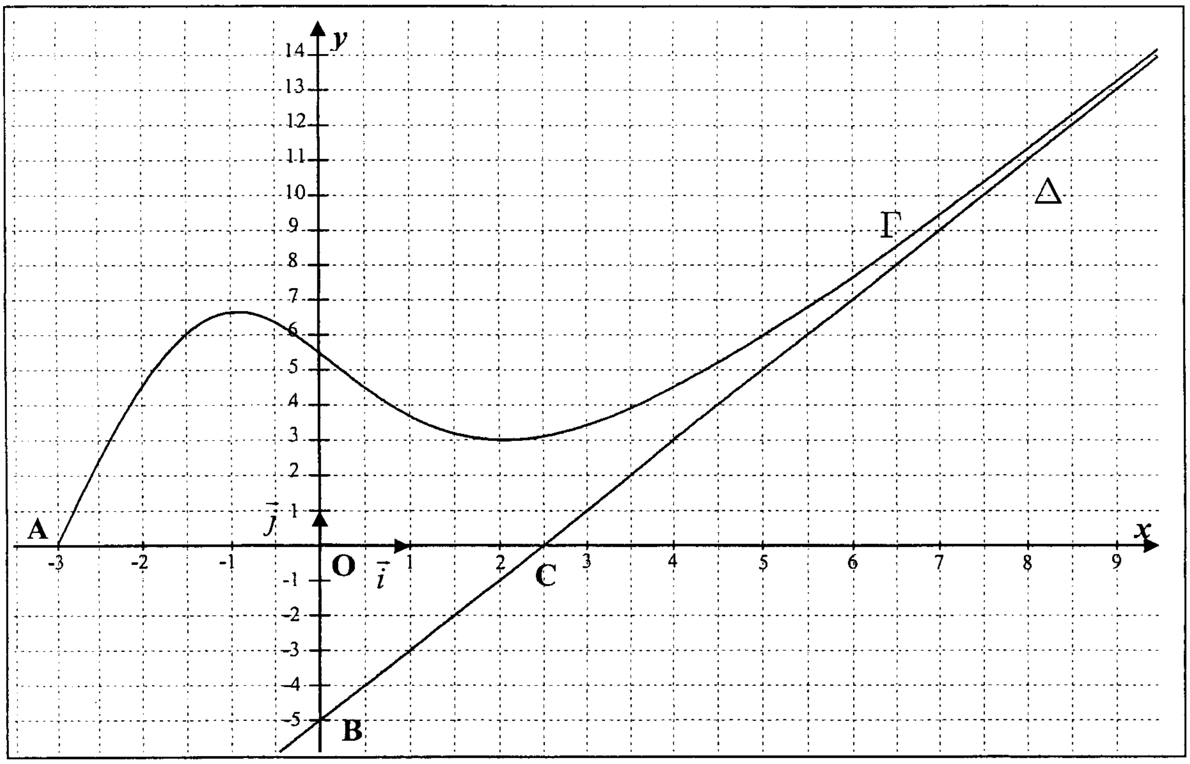
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
Les réponses ne seront pas justifiées.

<u>NOTATION</u> : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

a) L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-(2x-5)\right]=+\infty$.

d) $f'(0)=1$.

e) $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$.

f) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 7$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage.
On admet que :

- si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;
- si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à 0,35.

Première partie :

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1) Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.

2) En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $(70 \quad 120)$.

   En donner une interprétation.

Deuxième partie :

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année 2000 + n. On a donc $X_0 = 60$.

On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation y_i	38	49,1	51,81	57	62,7	68,97

D'après INSEE.

PARTIE A :

Le but de cette partie est de mettre en œuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

1) Premier modèle :

a) On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.

b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

2) Deuxième modèle :

a) Calculer l'accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

b) À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par :
$y = 51,81 \times 1,1^n$ pour l'année $2000 + n$ avec n entier naturel.
En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

PARTIE B : *Réduction des dépenses.*

Pour l'année 2005, la consommation médicale réelle s'est élevée à 83,44 milliards d'euros. Il a été décidé de réduire les dépenses et de les ramener en 2006 à 69,79 milliards d'euros. De quel pourcentage (arrondi à 1 %) la consommation médicale doit-elle baisser pour atteindre cet objectif ?

Rappel de définitions

On désigne par a_1 et a_2 des nombres réels strictement positifs $a_2 > a_1$.

L'accroissement absolu de a_1 à a_2 est égal à $a_2 - a_1$.

L'accroissement relatif de a_1 à a_2 est égal à $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1}$.

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\dfrac{1}{x+4}$.

PARTIE A :

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4) **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   b. On admet qu'il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha)=0$.
   Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

5) **a.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième) :

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

   b. En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre α tel que $f(\alpha)=0$.

PARTIE B :

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\ln(x+4)$.
   a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ en utilisant les résultats de la **PARTIE A**.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)dx$.

   (Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

ANNEXE

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) .

Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

AFFIRMATIONS	V	F
a) L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3 ; +\infty[$		
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$		
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x-5)\right] = +\infty$		
d) $f'(0) = 1$		
e) $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 1]$.		
f) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq 7$		